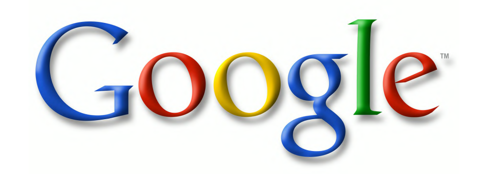
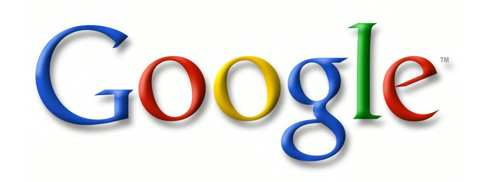
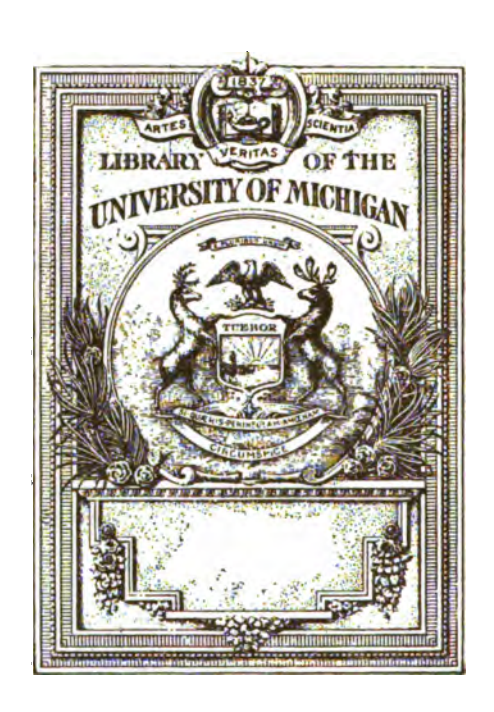
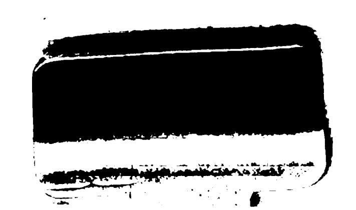





Librairie Scientifique ALBERT BLANCHARD
ACHAT ET VENTE
d'Ouvrages Scientifiques
Neufs & d'Occasion
3 et 3bis Place de la Sorbonne. PARIS. 5e




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



INTRODUCTION

A L'ÉTUDE

DES RADIOCOMMUNICATIONS

A LA MÊME LIBRAIRIE

BIBLIOTHÈQUE DES RADIOCOMMUNICATIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE

LÉON BOUTHILLON

INGÉNIEUR DES TÉLÉGRAPHES
DIRECTEUR DU SERVICE CENTRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G.-E. PETIT, **Ingénieur des Postes et Télégraphes, Directeur technique de la Compagnie générale de Radiotélégraphie, et** LÉON BOUTHILLON.

T. S. F. La Télégraphie sans-fil. Applications diverses.

Préface par le Professeur d'ARSONVAL, Membre de l'Institut.

1 vol. in-8°. Nombreuses illust. texte et hors-texte. Broché . 15 fr. »»

LÉON BOUTHILLON, **Ingénieur des Postes et Télégraphes, Directeur du Service central de télégraphie sans fil.**

La Théorie et la Pratique des Radiocommunications

Tome I. — ***Introduction à l'étude des Radiocommunications.*** **1 vol. in-8° raisin.**

En préparation :

Tome II. — ***La propagation des ondes électromagnétiques à la surface de la terre.***
» III. — ***Oscillations électriques.***
» IV. — ***L'antenne. — La direction des ondes.***
» V. — ***Les méthodes de transmission.***
» VI. — ***Les méthodes de réception.***
» VII. — ***Les divers genres de radiocommunications.***
Tome VIII. — ***Formulaire du radiotélégraphiste.***

LÉON BOUTHILLON
INGÉNIEUR DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES
DIRECTEUR DU SERVICE CENTRAL DE LA TÉLÉGRAPHIE SANS FIL
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

LA THÉORIE ET LA PRATIQUE
DES RADIOCOMMUNICATIONS

I

INTRODUCTION
A L'ÉTUDE DES
RADIOCOMMUNICATIONS



PARIS
LIBRAIRIE DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15
1919

PRÉFACE DE L'AUTEUR

Le problème des communications électriques sans fil, dont la solution avait été vainement cherchée, pendant le XIXe siècle, par diverses méthodes, a été, depuis 1894, l'objet d'études qui ont abouti à la découverte et au développement de la radiotélégraphie, dans laquelle l'énergie se propage par ondes électromagnétiques à travers l'atmosphère et le sol.

C'est uniquement de cette catégorie de transmission; en d'autres termes c'est uniquement des *radiocommunications* que traitera l'ouvrage dont le présent volume constitue la première partie.

J'ai pensé qu'à côté des travaux déjà nombreux sur le même sujet, à côté des manuels, des précis qui s'adressent plus spécialement aux techniciens, des ouvrages didactiques écrits en vue de l'enseignement, des livres de vulgarisation qui ont répandu dans le grand public la connaissance de la télégraphie sans fil, il y avait place pour un exposé d'ensemble assez étendu pour que les vues théoriques éparses dans les diverses revues puissent y trouver une place en rapport avec l'importance de la production littéraire radiotechnique, la plus abondante actuellement des littératures électriques; pour que les explications puissent être assez développées pour être rigoureuses et complètes; pour que les descriptions des organes des stations, des méthodes et des systèmes puissent être autre chose que des schémas ou des esquisses. Des résumés ou des ouvrages élémentaires de grande valeur ont été déjà publiés en France; il n'en existe aucun de l'ampleur de celui-ci. J'ai pensé qu'il était intéressant d'essayer de doter la littérature technique d'un traité dont le cadre fût assez large pour embrasser, mieux même que les beaux livres de Fleming et de Zenneck, les diverses parties et les aspects divers du problème complexe des radiocommunications.

Si la valeur ne se mesure pas au nombre de pages, il sera du moins

possible de traiter ici des sujets qui n'ont pu être abordés ailleurs que sommairement. J'ai pensé, en particulier, qu'il était nécessaire de faire une place importante à l'étude et à la solution des problèmes physiques que la télégraphie sans fil a posés ; qu'il convenait de ne pas les envisager uniquement au point de vue du technicien pressé d'obtenir des résultats concrets, pour des utilisations immédiates ; mais aussi, au moins dans les cas les plus intéressants, au point de vue du savant préoccupé surtout du beau problème à résoudre et de la vérité à manifester. Il arrive souvent, d'ailleurs, que cette voie la plus longue est en réalité la plus courte ; les origines de la télégraphie sans fil en sont un exemple souvent cité : les travaux purement scientifiques des grands physiciens du siècle dernier, Maxwell et Hertz en particulier, ont, en donnant immédiatement l'interprétation exacte des premiers résultats de Marconi, indiqué la bonne route à suivre aux savants et aux ingénieurs qui en furent les témoins et s'appliquèrent à la solution du problème des radiocommunications ; leur ont fourni le fil d'Ariane qui les a guidés dans le labyrinthe des explications alors possibles et, les empêchant de s'égarer sur de fausses pistes, ont accéléré dans la plus large mesure le développement de la nouvelle invention.

A un autre point de vue les recherches théoriques présentent pour notre sujet une importance exceptionnelle. La télégraphie sans fil a en effet, posé une grande quantité de problèmes nouveaux et complexes qu'on ne saurait trop comment aborder autrement. Considérons, par exemple, la question de la propagation des ondes électromagnétiques à la surface de la terre. L'expérience, non coordonnée et dirigée par la théorie, serait trop complexe, nécessiterait la réunion et la discussion de résultats trop nombreux et trop divers, pour qu'on puisse en attendre avant longtemps les éléments de solutions définitives. Seules des hypothèses et des études théoriques faites dans diverses directions peuvent mettre de l'ordre dans le chaos, indiquer l'expérience décisive, l' « experimentum crucis », qui, ne laissant pas le choix entre deux interprétations, déblaie tout d'un coup le chemin.

A ce point de vue, des travaux comme ceux de A. Sommerfeld, W. H. Eccles, et des mathématiciens qui ont étudié l'influence de la courbure de la terre, présentent un intérêt exceptionnel, et il était nécessaire, sous peine de n'être pas à la hauteur du sujet traité, de leur réserver, à elles et aux autres qui se présenteront dans le cours de cet ouvrage, une place en rapport avec leur importance.

Ces développements sont d'ailleurs un besoin pour toute intelligence vraiment scientifique. Un esprit de formation supérieure, fût-il celui de l'ingénieur le plus préoccupé des réalités de la technique journalière, ne se contente pas de conclusions sans preuve ou d'exposés sans

précision. Il lui faut la démonstration en même temps que le résultat. Et la théorie est en effet le plus souvent nécessaire pour la complète intelligence de celui-ci, pour la détermination des limites dans lesquelles il est valable et des conditions de son application.

Si l'on s'impose comme règle de ne pas trahir la pensée des auteurs qu'on prétend commenter, de tels exposés sont évidemment impossibles sans des développements exigeant parfois des connaissances assez étendues. Tout en différentiant du reste du texte, par des caractères plus fins, ce qui était pur calcul, j'ai pensé que, les mathématiques étant le langage et l'instrument de la recherche scientifique, il y avait lieu de s'en servir sans scrupule. Ce n'est pas dans un ouvrage français, dans le pays qui a été, depuis Pascal jusqu'à Henri Poincaré, pour ne pas parler des vivants, le berceau et la patrie même de la physique mathématique; celui où sont nés et où ont travaillé les théoriciens illustres des sciences exactes, les Laplace, les Fourier, les Fresnel, les Poisson, et tant d'autres; celui où des mathématiciens de génie ont forgé l'outil indispensable; ce n'est pas en France qu'il conviendrait de paraître avoir honte d'employer ce beau langage scientifique, clair et précis, image même du génie français, qui a servi d'instrument à tant de remarquables exposés, à tant d'illustres recherches et de mémorables découvertes.

Et, heureusement, ce n'est pas en France non plus que manquent les lecteurs épris de belle langue mathématique. La plapart des universités, l'école normale supérieure, l'école polytechnique en ont gardé le culte; d'autres, comme l'Ecole supérieure d'électricité, exigent des candidats, avant leur admission, une bonne préparation scientifique; l'enseignement supérieur français sait que de fortes études générales doivent précéder toute spécialisation. Cette vraie tradition française, qui a formé la plupart des techniciens de l'époque présente, et qu'il importe de ne pas laisser dévier, me faisait un devoir de ne pas négliger de donner une place correspondante à leur importance aux vues théoriques qui sont l'accompagnement nécessaire de l'étude des phénomènes utilisés dans la télégraphie sans fil, phénomènes si divers et si nombreux, qui vont de la physique astronomique, avec les questions de propagation, à celle de l'infiniment petit, avec les dissociations de l'atome ou de la molécule qui se produisent dans les tubes à vide.

Malgré l'utilité des considérations générales et des développements théoriques, un ouvrage comme celui-ci est avant tout un travail technique, destiné à des ingénieurs qui n'ont pas à résoudre des problèmes scientifiques mais doivent étudier des projets, les réaliser, et mettre en exploitation des stations, tout cela en tenant compte de considérations locales, particulières, financières, etc., qui n'ont le

plus souvent rien à voir avec la science ni même avec la pure technique. Aussi la plus grande place sera-t-elle réservée à la partie descriptive que j'ai voulu faire aussi complète et mettre au point aussi récemment que possible ; à la mise en lumière de résultats directement utilisables ; à la recherche des règles de l'établissement des projets, des méthodes de construction des antennes, des organes de transmission et de réception ; enfin à tous les éléments qui constituent l'art complexe et délicat du radiotélégraphiste. Si les volumes consacrés aux principes fondamentaux, aux oscillations électriques, sont plus spécialement théoriques, les descriptions d'expériences, les études d'appareils et de machines tiendront une place importante dans ceux qui traiteront de la propagation des ondes, des antennes, des méthodes d'émission et de réception ; les descriptions de réseaux de radiocommunications le développement des différentes méthodes d'exploitation feront l'objet principal de celui où seront exposées les différentes sortes de radiocommunication ; le formulaire du radiotélégraphiste, enfin, sera essentiellement pratique, il aura pour objet de donner aux techniciens les règles et les procédés d'études de projets.

J'ai pensé qu'il était nécessaire, avant toute étude de détail, de réunir dans un volume spécial, l'exposé des principes fondamentaux sur lesquels reposent la science et la technique des radiocommunications. Le fait qu'on trouve très rarement traitées avec une ampleur correspondant à leur importance, ou étudiées correctement, les questions de la nécessité de la haute fréquence et du choix de la longueur d'onde, l'influence de la hauteur des antennes, les raisons pour lesquelles celles-ci sont assimilables à des circuits oscillants, leur mode de rayonnement, etc., me faisait un devoir d'insister tout particulièrement et d'abord sur ces questions fondamentales. J'en ai réuni l'exposé dans une « Introduction à l'étude des radiacommunications » qui constitue le premier volume.

A la forme, qu'il eût été possible d'adopter, d'un traité en deux ou trois gros volumes, j'ai préféré celle d'un plus grand nombre de volumes de moindre importance, consacrés chacun, complètement et uniquement, à l'exposé d'une partie bien déterminée de l'ouvrage. La technique des radiocommunications n'est pas, comme certaines autres, celles de la stéréotomie ou de la coupe des pierres par exemple, un sujet auquel les années qui se succèdent n'apportent que peu de changements. Si ce fait qu'il s'agit d'applications de la haute fréquence, celui de la propagation par ondes électromagnétiques, sont des éléments du problème définitivement acquis, et qui fixent les grandes lignes de l'étude des principes fondamentaux, il n'en est pas de même des méthodes de réalisation et d'application. Quelques années suffisent pour amener une révolution complète dans les procédés d'émis-

sion, ou de réception, par suite dans les études et les calculs de projets. Il faut que l'ouvrage technique suive cet incessant développement ; des retouches continuelles, des refontes successives sont nécessaires, et des volumes partiels se prêtent mieux que de gros in-folios à cette perpétuelle remise sur le chantier.

La publication d'un aussi important ouvrage vient-elle à son heure ? A la fièvreuse activité du temps de guerre, qui exigeait des réalisations immédiates, fussent-elles incomplètes, succède maintenant le travail plus réfléchi et plus parfait que permet seule la paix. Les études longues et fécondes, qui ne peuvent être menées à bonne fin que par des esprits assurés de l'avenir, peuvent maintenant être recommencées. L'éducation de techniciens, interrompue par la nécessité d'utiliser pendant la guerre, toutes les activités pour la défense du pays, peut être reprise. Enfin vont se réaliser de grands programmes de radiocommunications. L'évolution de la télégraphie sans fil fait prévoir, pour les différents réseaux maritimes, intérieurs, transocéaniques et trans-continentaux, un développement considérable et très prochain. La France victorieuse se doit d'être à la tête du progrès. Le pénible et long travail que représente l'élaboration de cet ouvrage serait amplement payé s'il pouvait contribuer, pour sa modeste part, à cette grande œuvre de l'avenir.

INTRODUCTION

A L'ÉTUDE DES

RADIOCOMMUNICATIONS

L'apparition et le développement de la radiotélégraphie sont considérés par un grand nombre d'auteurs comme la suite logique des mémorables travaux de **Maxwell** et **de Hertz** sur la théorie électromagnétique de la lumière. Pourtant les travaux antérieurs rendaient compte, comme l'a remarqué **M. Brillouin** (1), des principaux phénomènes observés. La production d'oscillations électriques par la décharge d'un condensateur avait été expliquée dès 1853 par **Sir William Thomson** (2) ; l'utilisation de la résonance se rattache à l'étude générale des phénomènes périodiques ; la nécessité d'utiliser des antennes verticales se justifie par raison de symétrie ; la variation de l'énergie reçue en raison inverse du carré de la distance, dans un diélectrique parfait, est une conséquence des lois de l'induction. Ce serait donc une erreur de croire que, si la radiotélégraphie était apparue cinquante ans plus tôt, il en serait résulté un effondrement des anciennes idées sur l'électricité. Toutefois la théorie de Maxwell est celle qui rend le mieux compte de l'ensemble des faits observés ; elle explique la vitesse finie de la propagation, et le rayonnement d'énergie dans l'espace, à partir du système transmetteur. C'est *les équations du champ électromagnétique*, établies d'après les idées de Maxwell et de Hertz qui *nous serviront de point de départ* dans notre exposé, et notre premier chapitre sera consacré à un exposé succinct de la théorie de ces auteurs.

---

(1) M. Brillouin, *Propagation de l'Électricité*, § 323, p. 284. A. Hermann, Paris, 1904.
(2) William Thomson, *On Transient Electric Currents*. « Philosophical Magazine », 1853, série 4, vol. V, p. 393.

Munis de ces relations fondamentales, nous pourrons aborder le problème général des transmissions à distance par rayonnement électromagnétique : une liaison électromagnétique à grande distance devant comprendre d'une part un *dispositif radiateur*, qui rayonne dans l'espace une certaine quantité d'énergie ou, ce qui revient au même, qui produit autour de lui un champ électromagnétique, et d'autre part un *dispositif collecteur* qui, placé dans le champ, devient le siège d'une perturbation électrique, et absorbe une certaine quantité d'énergie qu'il est possible de transformer en énergie mécanique. Nous aurons à répondre aux questions suivantes :

Problème de l'émission : trouver un système capable de produire, à une distance donnée, un champ électromagnétique donné.

Problème de la réception : étant donné un champ électromagnétique, étudier ses réactions sur un système de conducteurs donné.

Les deux dispositifs transmetteur et récepteur sont d'ailleurs indépendants : nous pouvons toujours admettre pratiquement que le champ émis par le récepteur est trop peu intense, en raison de la distance qui sépare les deux stations, pour avoir une réaction sensible sur le transmetteur. *On pourra donc étudier séparément la question de la transmission et celle de la réception.*

En pratique, les ondes électromagnétiques se propagent à la surface de la terre. Mais nous verrons que le phénomène est essentiellement le même, au-dessus du sol, que celui qui se manifesterait dans une atmosphère parfaitement diélectrique et indéfinie dans tous les sens, la terre étant supposée supprimée, à condition toutefois que les distances soient suffisamment petites, et les fréquences des oscillations électriques très grandes : c'était le cas des expressions de Hertz et des essais faits dans les premières années de l'histoire des radiocommunications. On peut alors considérer la terre comme plane et parfaitement conductrice, et l'atmosphère comme parfaitement diélectrique et indéfinie ou, ce qui revient au même, ainsi que nous venons de l'indiquer, au point de vue de la propagation dans l'atmosphère, remplacer la terre par une atmosphère identique à celle qui existe audessus de la surface.

Nous sommes donc amenés à *étudier tout d'abord les radiocommunications à travers un diélectrique parfait* (chapitre II).

Le problème, posé en ces termes généraux a, comme l'a montré

H. Poincaré, une *solution théorique*, mais c'est une solution de mathématicien, ce n'est pas une solution d'ingénieur ; elle conduirait difficilement, dans la pratique, à des chiffres utilisables. Aussi serons nous amenés, pour obtenir les lois fondamentales des radiotransmissions, à étudier le cas le plus simple, celui d'un *élément conducteur*, ouvert ou fermé, rayonnant dans un espace indéfini : c'est un cas particulier du problème de l'émission ; celui qui lui correspond pour la réception consiste à chercher l'action d'un champ électromagnétique donné sur un élément de conducteur. Nous obtiendrons, pour ce cas particulier, la solution du problème de la transmission d'énergie.

La partie essentielle du chapitre II et de l'ouvrage tout entier est celle qui aboutit à l'établissement de l'*équation différentielle de l'élément de courant rayonnant et possédant capacité, résistance de self-induction*. Il ne suffit pas, pour écrire cette relation, indispensable pour l'étude du mode d'oscillation de l'antenne, de posséder l'expression qu'il est facile d'obtenir en appliquant le théorème de Poynting à grande distance de l'oscillateur, de la puissance moyenne rayonnée. La connaissance exacte de la façon même dont l'énergie est, à chaque instant, émise, est absolument nécessaire. Elle permet seule de déterminer le terme de l'équation différentielle qui correspond au rayonnement. Et de la forme de l'équation différentielle résulte, avec la délimitation exacte des conditions dans lesquelles cette proposition peut être admise, que l'antenne peut être, au point de vue de son mode d'oscillation, assimilée à un circuit ou à un groupe de circuits possédant capacité, self-induction, et résistance. (La résistance comprenant d'ailleurs un terme qui correspond au rayonnement). La simplicité du résultat paraît avoir fait souvent perdre de vue la nécessité et les difficultés de la démonstration, qui est omise ou insuffisante dans la plupart des travaux, d'ensemble ou spéciaux, sur les radiocommunications. Ce théorème fondamental est, dans le présent ouvrage, malgré l'ampleur des développements auxquels il donne lieu, l'objet d'une étude complète. L'inconvénient d'une moins grande rapidité de l'exposé ne pouvait évidemment être mis en balance avec celui d'un manque de rigueur dans une démonstration d'une telle importance, et d'autant plus nécessaire qu'elle est plus souvent négligée.

Les relations que nous aurons obtenues au chapitre II pourront ensuite être facilement adaptées au *cas de la propagation à la sur-*

face d'un sol supposé plan et parfaitement conducteur (chapitre III).

Les résultats fondamentaux auxquels nous aboutirons ainsi, et que nous résumerons dans un chapitre spécial qui sera la conclusion de cette introduction, sont les principes essentiels de toute l'étude des radiocommunications ; il nous restera, dans les volumes qui suivront, à les corriger pour tenir compte des particularités de la terre et de l'atmosphère, à les développer, à en tirer les conséquences, et à les appliquer, pour exposer complètement la théorie et la technique des radiocommunications.

CHAPITRE I

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

I. — Équations fondamentales du champ électromagnétique.

1. Les lois de l'électricité dans les corps en repos, qui ont été formulées par **Hertz** (2), dans un célèbre mémoire publié en 1890 et intitulé : « Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique des corps en repos », sont la base de la théorie des radiocommunications par ondes électromagnétiques. Nous exposerons brièvement, d'après

H. Poincaré (3), la théorie de **Hertz**, qui consiste à mettre en équations les deux lois fondamentales de l'électricité, celle de **Faraday**, ou de l'induction, et celle d'**Ampère**.

1° Loi de Faraday. Premier groupe d'équations fondamentales.

2. Soient $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, les composantes de l'intensité du champ électrique, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$, les grandeurs correspondantes pour le champ magnétique, μ la perméabilité magnétique.

Considérons une surface S quelconque, limitée par une courbe C. Si le champ varie, et si le contour est constitué par un fil conducteur, il se produit dans ce fil un courant provoqué par une force électromotrice d'induction représentée par l'intégrale de ligne

$$\int(\mathcal{E}_x d_x + \mathcal{E}_y d_y + \mathcal{E}_z d_z)$$

que nous écrirons

$$\int \Sigma \mathcal{E}_x d_x.$$

L'expérience nous apprend que cette force électromotrice est égale à la dérivée par rapport au temps du flux d'induction magnétique de composantes $\mu\mathcal{M}_x$, $\mu\mathcal{M}_y$, $\mu\mathcal{M}_z$, qui traverse la surface S. Donc

$$\int \Sigma \mathcal{E}_x d_x = \frac{\partial}{\partial t}\int \mu(l\mathcal{M}_x + m\mathcal{M}_y + n\mathcal{M}_z)d\omega, \qquad (1)$$

l, m, n, étant les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$; l'intégrale du premier membre étant étendue au contour C, celle du deuxième membre à la surface S.

Transformons le premier membre de la relation (1) à l'aide du théorème de **Stokes**. Il vient :

$$\int \Sigma \mathcal{E}_x d_x = \int \Sigma l\left(-\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial_z} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial_y}\right)d\omega$$

et l'équation (1) s'écrit

$$\int \Sigma l\left(-\frac{\partial \mathcal{E}_y}{dz} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}\right)d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int \Sigma l\mu\mathcal{M}_x d\omega = \int \Sigma \mu l d\omega \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial t}$$

d'où, en identifiant les coefficients de

$$l d\omega, \qquad m d\omega, \qquad n d\omega$$

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}, \\ \mu\frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}, \\ \mu\frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}. \end{aligned}\right| \qquad \text{I}$$

C'est le *premier groupe des équations fondamentales* du champ électromagnétique.

2° Loi d'Ampère. Deuxième groupe d'équations fondamentales.

3. Reprenons la surface S, limitée par le contour C. Une masse magnétique qui décrit la courbe est soumise, de la part du champ extérieur, à une force dont le travail est représenté par l'intégrale de ligne

$$\int(\mathcal{H}_x dx + \mathcal{H}_y dy + \mathcal{H}_z dz)$$

étendue au coutour C.

L'expérience nous apprend que cette intégrale est égale au produit par 4π, changé de signe, du flux de courant qui traverse la surface. Soient u_x, u_y, u_z, les composantes du courant. On a :

$$\int\Sigma\mathcal{H}_x dx = -4\pi\int(lu_x + mu_y + nu_z)d\omega.$$

Transformons, comme nous l'avons fait ci-dessus, le premier membre de l'équation par le théorème de **Stokes**, il vient :

$$\int\Sigma l d\omega\left(-\frac{\partial\mathcal{H}_y}{dz} + \frac{\partial\mathcal{H}_z}{dy}\right) = -4\pi\int\Sigma l u_x d\omega$$

d'où, en identifiant les coefficients de

$$l d\omega, \quad m d\omega, \quad n d\omega$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u_x &= -\frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{H}_y}{\partial z}, \\ 4\pi u_y &= -\frac{\partial\mathcal{H}_x}{\partial z} + \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial x}, \\ 4\pi u_z &= -\frac{\partial\mathcal{H}_y}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{H}_x}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

L'expérience n'a été faite que pour des circuits fermés, dans lesquels entre seul en jeu le courant de conduction i_x, i_y, i_z, régi par la loi d'**Ohm**.

$$\left\{\begin{aligned} i_x &= c\mathcal{E}_x, \\ i_y &= c\mathcal{E}_y, \\ i_z &= c\mathcal{E}_z. \end{aligned}\right.$$

c étant la conductibilité.

Maxwell (1) a introduit en outre la notion de *courant de déplacement :* il suppose que dans un diélectrique soumis à un champ électrique il se produit un déplacement f_x, f_y, f_z d'électricité proportionnel au champ électrique. Si le champ électrique varie, le déplacement électrique varie, en donnant naissance à un courant de déplacement dont les composantes sont :

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} \quad \frac{\partial f_y}{\partial t} \quad \frac{\partial f_z}{\partial t}$$

Maxwell représente les composantes du déplacement par

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\mathcal{E}_x \\ f_y = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\mathcal{E}_y \\ f_z = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\mathcal{E}_z \end{cases}$$

ε est le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique.

Le courant total u_x, u_y, u_z, est la somme du courant de conduction et du courant de déplacement

$$\begin{cases} u_x = i_x + \dfrac{\partial f_x}{\partial t} \\ u_y = i_y + \dfrac{\partial f_y}{\partial t} \\ u_z = i_z + \dfrac{\partial f_z}{\partial t} \end{cases}$$

de sorte que les équations (2) deviennent

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\left(i_x + \frac{\partial f_x}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial z} \\ 4\pi\left(i_y + \frac{\partial f_y}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial x} \\ 4\pi\left(i_z + \frac{\partial f_z}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ou, en remplaçant i_x, i_y, i_z, f_x, f_y, f_z, par leurs valeurs en fonction des composantes du champ électrique

$$\left.\begin{aligned} 4\pi c\mathcal{E}_x + \varepsilon\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial z} \\ 4\pi c\mathcal{E}_y + \varepsilon\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial x} \\ 4\pi c\mathcal{E}_z + \varepsilon\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial y} \end{aligned}\right| \qquad \text{II}$$

Ces équations reposent sur l'hypothèse des courants de déplacement. Elles restèrent sans base expérimentale jusqu'aux expériences de Hertz, qui mirent en évidence les effets de ces courants.

Les relations (II) représentent le *deuxième groupe des équations fondamentales* du champ électromagnétique.

II. — Introduction du potentiel vecteur.

4. Posons :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \\ \mathcal{M}_y &= \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \\ \mathcal{M}_z &= \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Ces équations ne suffisent pas pour déterminer la fonction P, que nous nommerons potentiel vecteur, car elles se réduisent en somme à deux à cause de la relation

$$\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial z} = 0$$

qui exprime que la densité du magnétisme est nulle.

Différentions les deux membres de la première équation par rapport à t, il vient

$$\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 P_z}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 P_y}{\partial z \partial t}$$

ou, remplaçant $\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial t}$ par sa valeur tirée de la première équation (I)

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 P_z}{\partial t \partial y} - \mu \frac{\partial^2 P_y}{\partial t \partial z}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{E}_z - \mu \frac{\partial P_z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{E}_y - \mu \frac{\partial P_y}{\partial t}\right)$$

On trouverait, par permutation circulaire, deux équations analogues ; l'expression

$$\left(\mathcal{E}_x - \mu \frac{\partial P_x}{\partial t}\right) dx + \left(\mathcal{E}_y - \mu \frac{\partial P_y}{\partial t}\right) dy + \left(\mathcal{E}_z - \mu \frac{\partial P_z}{\partial t}\right) dz$$

est donc la différentielle exacte $d\varphi$ d'une fonction φ, et nous pouvons écrire

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \mu \frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \mathcal{E}_y &= \mu \frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \mathcal{E}_z &= \mu \frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Les équations (4) et (5) peuvent remplacer le premier groupe d'équations fondamentales.

On a d'ailleurs, en tout point du champ, ρ étant la densité de l'électricité

$$\frac{\partial^2(\varepsilon\mathcal{E}_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\varepsilon\mathcal{E}_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\varepsilon\mathcal{E}_z)}{\partial z^2} = 4\pi\rho.$$

(Equation de Poisson), ou

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \rho. \tag{6}$$

Equations de Maxwell. — *5*. Nous désignerons sous le nom d'équations de Maxwell l'ensemble des relations (3), (4), (5), (6), qui peuvent remplacer les équations I et II.

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{aligned}
\mathcal{H}_x &= \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z},\\
\mathcal{H}_y &= \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x},\\
\mathcal{H}_z &= \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}.
\end{aligned}\right.\\
\left\{\begin{aligned}
4\pi\left(i_x + \frac{\partial f_x}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z},\\
4\pi\left(i_y + \frac{\partial f_y}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x},\\
4\pi\left(i_z + \frac{\partial f_z}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y}.
\end{aligned}\right.\\
\left\{\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\varepsilon} f_x &= \mu\frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},\\
\frac{4\pi}{\varepsilon} f_y &= \mu\frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},\\
\frac{4\pi}{\varepsilon} f_z &= \mu\frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.
\end{aligned}\right.\\
\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{dz} = \rho,\\
\left\{\begin{aligned}
f_x &= \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathcal{E}_x,\\
f_y &= \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathcal{E}_y,\\
f_z &= \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathcal{E}_z.
\end{aligned}\right.
\end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

Dans ces équations $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$, $\mathcal{H}_z$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$. i_x, i_y, i_z. f_x, f_y, f_z, sont des quantités définies expérimentalement ; mais il n'en est pas de même du potentiel vecteur. De plus, les équations ne suffisent pas pour déterminer

complètement celui-ci; il est possible de le définir de plusieurs façons, en modifiant la définition de φ en même temps.

Potentiel vecteur de Maxwell. — *6.* Si l'on s'impose la condition

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0$$

il vient, en portant dans l'expression (2) de u_x les valeurs de $\mathcal{M}_y$ et $\mathcal{M}_z$ tirées des équations (4) :

$$4\pi u_x = -\frac{\partial^2 P_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 P_z}{\partial x \partial z}$$

ou, en posant

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \Delta$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) = \text{div.}$$

$$4\pi u_x = \Delta P_x - \frac{\partial}{\partial x}(\text{div. P}) \tag{7}$$

ou, en tenant compte de (6), et écrivant les équations correspondantes obtenues en permutant x, y, z, dans l'équation ci-dessus

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u_x &= \Delta P_x \\ 4\mu u_y &= \Delta P_y \\ 4\mu u z &= \Delta P_z \end{aligned}\right| \tag{8}$$

L'équation (6) donne d'ailleurs, en y remplaçant f_x, f_y, f_z, par leurs valeurs tirées de (4)

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}(\text{div. P}) + \Delta\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \tag{9}$$

ou, en tenant compte de (6)

$$\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho = \Delta\varphi. \tag{10}$$

L'intégrale de la première équation (8) est le potentiel d'une matière attirante fictive de densité u_x. Soit un point x, y, z, et un autre point x', y', z', où cette matière attirante fictive a la densité u'_x. Dans un élément de volume $d\tau'$ situé autour de x', y', z', il y a une quantité de matière $u'_x d\tau'$, et on a

$$P_x = \int \frac{u'_x d\tau'}{r}$$

r étant la distance des deux points x', y', z' ; x, y, z.

De même

$$P_y = \int \frac{u'_y d\tau'}{r}$$

$$P_z = \int \frac{u'_z d\tau'}{r}.$$

De même, d'après l'équation (10)

$$\varphi = \int \frac{\rho}{\varepsilon r} \partial\tau'.$$

La fonction φ est donc le potentiel électrostatique ; les fonctions P_x, P_y, P_z, sont les potentiels de matières attirantes de densités u_x, u_y, u_z.

Potentiel vecteur de Lorentz. — *7.* Si l'on s'impose la condition

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{11}$$

il vient, en tenant compte de (7) et (11)

$$4\pi u_x = \Delta P_x - \frac{\partial}{\partial x} (\text{div. P})$$

$$= \Delta P_x + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$$

ou, en remplaçant φ par sa valeur tirée de la première équation (5)

$$4\pi\mu u_x = \Delta P_x + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}.$$

Remplaçons dans cette équation u_x par sa valeur $i_x + \frac{\partial f_x}{\partial t}$ et $\mathcal{E}_x$ par sa valeur $\frac{4\pi f_x}{\varepsilon}$, il vient

$$4\pi \left(i_x + \frac{\partial f_x}{\partial t} \right) = \Delta P_x - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} + \varepsilon \, . \, \frac{\partial f_x}{\partial t} \, . \, \frac{4\pi}{\varepsilon}$$

ou

$$\left. \begin{aligned} 4\pi i_x &= \Delta P_x - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \\ 4\pi i_y &= \Delta P_y - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} \\ 4\pi i_z &= \Delta P_z - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 P_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right| \tag{12}$$

On a aussi, en remplaçant dans (9) div. P par sa valeur tirée de (11)

$$\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho = \Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{13}$$

L'intégrale de la première équation 12 est ce qu'on appelle, d'après Henri Poincaré, le potentiel retardé d'une matière fictive de densité i_x, potentiel défini de la façon suivante :

Soit $f(x, y, z, t)$, la densité d'une matière attirante, et soit $d\tau'$ un élément de volume de coordonnées x', y', z'. Le potentiel ordinaire de ce volume attirant sera

$$V = \int \frac{f(x'y'z', t)d\tau'}{r}$$

avec

$$r = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Le potentiel retardé aura pour valeur

$$V' = \int \frac{f(x', y'. z', t - \varepsilon\mu\sqrt{r})}{r} d\tau'. \tag{13}$$

Les équations 12 signifient que *les composantes* P_x, P_y, P_z, *du potentiel vecteur sont les potentiels retardés des composantes du courant de conduction* i_x, i_y, i_z. *L'équation* (13) *montre que la fonction* φ *est le potentiel retardé de la quantité* ρ *d'électricité*, *au facteur* $\frac{1}{\varepsilon}$ *près*.

Cas d'un champ de révolution autour de Oz. Potentiel vecteur de Hertz. — *8*. Dans le cas d'un champ de révolution les lignes de force électriques et magnétiques devront, par raison de symétrie, être situées dans les plans méridiens ou prendre la forme de parallèles. Puisque la force magnétique doit être tangente aux conducteurs, et la force électrique leur être normale, les lignes de force magnétiques seront des parallèles, et les lignes de force électrique seront dans les méridiens.

On a donc

$$\mathcal{M}_z = 0. \tag{14}$$

D'autre part, la relation

$$\text{div. } \mathcal{M} = 0$$

donne

$$\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial y} = 0$$

d'où l'on déduit que l'expression

$$\mathcal{M}_x dy - \mathcal{M}_y dx = dP_z$$

est d'une différentielle exacte, et qu'on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \frac{\partial P_z}{\partial y} \\ \mathcal{M}_y &= -\frac{\partial P_z}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$\mathcal{M}$ étant indépendant de l'azimut il en est de même de P_z, qui est fonction de r et z seulement.

Les équations (14) et (15) se déduisent des équations (4) en supposant :

$$P_x = 0, \quad P_y = 0.$$

Il est donc possible de faire cette hypothèse.

P_z représente alors le potentiel vecteur sous la forme de Hertz, et l'on en déduit les composantes du champ électromagnétique par les relations :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \frac{\partial P_z}{\partial y} \\ \mathcal{M}_y &= -\frac{\partial P_z}{\partial x} \\ \mathcal{M}_z &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \mathcal{E}_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \mathcal{E}_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial P_z}{\partial t}. \end{aligned}\right| \qquad (17)$$

III. — Propagation dans les diélectriques Ondes électromagnétiques

Equations fondamentales du champ électromagnétique dans un milieu diélectrique homogène. — *10.* Dans un milieu diélectrique homogène, de constantes ε et μ il n'y a pas de courant de conduction, et les équations fondamentales I et II du champ électromagnétique deviennent

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} \end{aligned}\right| \qquad (IV)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial z} \\ \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial y} \end{aligned}\right| \qquad (V)$$

On voit que, dans ce cas, les équations qui lient la force électrique à la force magnétique sont réciproques.

Propagation par ondes.— *11*. On a d'ailleurs, dans un milieu diélectrique, où il n'y a pas d'électricité ni de magnétisme libre.

$$\left.\begin{array}{l}\text{div. } \mathcal{M} = 0 \\ \text{div. } \mathcal{E} \ = 0\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r}(18)\\(19)\end{array}$$

Différentions par rapport à t la première équation (IV). Il vient

$$\mu \frac{\partial^2 \mathcal{M}_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial y \partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t}$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}$ et $\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t}$ par leurs valeurs tirées de (V)

$$\mu \frac{\partial^2 \mathcal{M}_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathcal{M}_x - \frac{\partial}{\partial x} (\text{div. } \mathcal{M})$$

ou, en tenant compte de (18)

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{M}_x}{\partial t^2} = \Delta \mathcal{M}_x \qquad (20)$$

On obtiendrait des expressions analogues pour

$$\mathcal{M}_y, \quad \mathcal{M}_z, \quad \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{E}_z.$$

Ces expressions prouvent que le champ électromagnétique se propage dans l'espace, sous forme d'ondes, avec la vitesse $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

12. Considérons en effet l'expression

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi.$$

Intégrons les deux termes dans un volume donné, d'élément $d\tau$, limité par la surface S. Nous avons

$$\varepsilon\mu \int \frac{\partial^2 \varphi}{dt^2}\, d\tau = \int \Delta\varphi d\tau \qquad (21)$$

Mais, d'après le théorème de Green.

$$\int \Delta\varphi d\tau = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS \qquad (22)$$

la deuxième intégrale s'étendant à la surface qui limite le volume, et $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ désignant la dérivée le long de la normale à l'élément de surface, dirigée vers l'extérieur.

Si le volume est une sphère de rayon r dans le centre est au point P, de coordonnées x, y, z, et si $d\omega$ est l'angle solide sous-tendu par l'élément dS on a :

$$dS = r^2 d\omega, \qquad d\tau = r^2 dr d\omega$$

et

$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 d\omega = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int \varphi_r d\omega \tag{23}$$

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} d\tau = \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} r^2 dr d\omega = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint d\omega \int_0^r r^2 \varphi_r dr$$

φ_r étant la valeur de φ à la surface de la sphère.

Mais on obtient, par la combinaison de (21) et (22)

$$\varepsilon\mu \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} d\tau = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

Différentions les deux membres par rapport à la limite supérieure r, il vient :

$$\varepsilon\mu r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \varphi_r d\omega = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int \varphi_r d\omega \right)$$

Mais

$$4\pi \bar{\varphi}_r = \iint \varphi_r d\omega$$

$\bar{\varphi}_r$ désignant la valeur moyenne de φ sur la sphère S. Donc :

$$\varepsilon\mu r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\varphi}_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \bar{\varphi}_r}{\partial r} \right)$$

ou

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\bar{\varphi}_r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{\varphi}_r) \tag{24}$$

13. Posons maintenant

$$r\bar{\varphi}_r = \Phi$$

et introduisons les nouvelles variables

$$x = r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad y = r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2\,\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{2\,\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

Portons dans l'équation (24), il reste

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

Equation différentielle dont la solution générale est évidemment :

$$\Phi = f_1(x) + f_2(y)$$

$$\Phi = f_1\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f_2\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) \qquad (25)$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions arbitraires.

Ou

$$r\bar{\varphi}_r = f_1\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f_2\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) \qquad (26)$$

$$\bar{\varphi}_r = \frac{1}{r}\left[f_1\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f_2\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)\right] \qquad (27)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions arbitraires.

14. Dérivons l'équation (26) par rapport à r. Il vient :

$$\bar{\varphi}_r + r\frac{\partial\bar{\varphi}_r}{\partial r} = f'_1\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f'_2\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) \qquad (28)$$

Si r tend vers zéro, $\bar{\varphi}_r$ tend vers la valeur φ au point P. Donc

$$\varphi = f'_1\left(-\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f'_2\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$$

Nous avons d'ailleurs, d'après (28)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}(r\bar{\varphi}_r) = f'_1\left(r - \dfrac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f'_2\left(r + \dfrac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) \\ \sqrt{\varepsilon\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial t}(r\bar{\varphi}_r) = -f'_1\left(r - \dfrac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f'_2\left(r + \dfrac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) \end{cases}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\partial}{\partial t}\right) r\bar{\varphi}_r = 2f'_2\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$$

et, pour $t = 0$

$$2f'_2(r) = \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\varphi}_r) + \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{\varphi}_r)\right]_{t=0}$$

$$2f'_2(r) = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{4\pi}\int \varphi_r d\omega\right) + \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{r}{4\pi}\int \frac{\partial\varphi_r}{\partial t}\,d\omega\right]_{t=0.}$$

Supposons qu'à l'origine du temps $t = 0$ φ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ sont donnés en tout point de l'espace. Soient

$$\left(\varphi\right)_{t=0} = F(x, y, z) \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = \Phi(x, y, z)$$

Alors

$$2f_2(r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{4\pi}\int F_r d\omega\right) + \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{r}{4\pi}\int \Phi_r d\omega \qquad (29)$$

Mais, puisque le champ n'est nulle part infini, on a, au point $r = 0$ $r\overline{\varphi}_r = 0$, d'où

$$f_1\left(-\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f_2\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = 0$$

d'où

$$-f'_1\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f'_2\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = 0$$

et, d'après (28)

$$\varphi = 2f'_2\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) \qquad (30)$$

Comparant les deux expressions (29) et (30) et faisant $r = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, nous voyons que

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}\left(\frac{t}{4\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\int F_{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}\,d\omega\right) + \frac{t}{4\pi}\int \Phi_{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}\,d\omega \qquad (31)$$

La valeur de φ au temps t est donc déterminée si nous connaissons la valeur initiale moyenne, sur la sphère de rayon $\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, de la dérivée $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, ainsi que la variation de la valeur moyenne de φ avec le rayon de la sphère.

L'expression (31) montre que si φ est nul au temps $t = 0$ au point x, y, z, il le restera jusqu'au temps t déterminé par

$$\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = d$$

d étant la distance du point P à la perturbation au temps $t = 0$. Donc la perturbation se propage dans tous les sens avec la vitesse $\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, à la façon d'une onde.

La solution précédente, qui est due à **Poisson** montre que *les perturbations électromagnétiques se propagent avec une vitesse finie* $\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. *L'équation*

$$A^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi$$

est l'équation générale de la propagation par ondes. Elle se rencontre dans un grand nombre de problèmes de physique mathématique.

Vitesse de propagation. — La vitesse de propagation est égale à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

15. Dans le vide, en unités électromagnétiques ε est égal à l'inverse du carré de la vitesse de la lumière; μ est égal à 1. *La vitesse de propagation dans le vide est donc égale à la vitesse de la lumière, soil* 3.10^{10} *centimètres par seconde.*

Cas d'un ohamp de résolution autour de Oz.— *16.* Nous avons vu que dans ce cas le champ électromagnétique se déduit du potentiel vecteur P_z de **Hertz** par les expressions (16) et (17) :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= \frac{\partial P_z}{\partial y} \\ \mathcal{H}_y &= -\frac{\partial P_z}{\partial x} \\ \mathcal{H}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \mathcal{E}_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \mathcal{E}_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial P_z}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Nous démontrerons, en suivant M. Brillouin (4), que les composantes du champ électromagnétique peuvent être déduites d'une fonction Π en effectuant les dérivations convenables.

La force électrique est, par raison de symétrie, située dans le plan méridien et indépendante de l'azimut. Prenons pour variables indépendantes l'ordonnée z et la distance r à l'origine, et soit $\mathcal{E}_\rho$ la composante du champ électrique parallèle au plan des xy, on a :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{x}{\sqrt{r^2 - z^2}} \mathcal{E}_\rho \\ \mathcal{E}_y &= \frac{y}{\sqrt{r^2 - z^2}} \mathcal{E}_\rho \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathcal{E}}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right).$$

On peut donc écrire :

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \qquad \mathcal{E}_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \quad (34)$$

$\frac{\partial \psi}{\partial z}$ étant une fonction convenable de r et z.

Ecrivons ensuite que, dans un diélectrique,

$$\text{div. } \mathcal{E} = 0,$$

il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0 ;$$

d'où :

$$\mathcal{E}_z = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) \tag{35}$$

sans ajouter de fonction arbitraire de x, y, z puisque le champ dû à une surface de révolution autour de Oz ne comporte pas évidemment de force axiale indépendante de z.

Soit U la fonction de r et z qui satisfait à l'équation :

$$\Delta\psi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mathrm{U},$$

les équations (20) donnent

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x \partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y \partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} = 0. \end{array}\right.$$

17. La fonction U que ces trois équations déterminent est

$$\mathrm{U} = f(z, t) + \varphi(t)\log(x^2 + y^2) + \chi(t),$$

lorsqu'on tient compte de la symétrie ; f, φ, χ, désignent des fonctions arbitraires dont on ne change pas le caractère en les écrivant sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} f = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_1(z, t) = \left(\Delta - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_1(z, t) \\ \varphi = -\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_1(t) = \left(\Delta - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_1(t) \\ \chi = -\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\chi_1(t) = \left(\Delta - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi_1(t) \end{array}\right.$$

d'où

$$\mathrm{U} = \left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[f_1(z, t) + \varphi_1(t)\log(x^2 + y^2) + \chi_1(t)\right]$$

ce qui conduit à poser

$$\psi = \Pi + f_1(z, t) + \varphi_1(t)\log(x^2 + y^2) + \chi_1(t)$$

avec

$$\Delta\Pi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = 0 \tag{36}$$

Or, quand nous remontons de ψ à $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, qui seuls nous intéressent, par les formules (33) et (34), tous les termes en φ_1, f_1, χ_1, disparaîtront et il restera seulement

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}_x = \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial x \partial z} \\ \mathcal{E}_y = \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial y \partial z} \\ \mathcal{E}_z = -\left(\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}\right) \end{array}\right| \tag{37}$$

Comparons ces expressions aux équations (17).

Nous voyons que φ ne diffère de $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ que par une fonction u de z et de t seulement

$$\varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + u(z, t)$$

Les dernières équations des groupes (17) et (37) donnent ensuite :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + v(z, t) + \mu \frac{\partial P_z}{\partial t} = 0$$

ou, d'après l'expression (36)

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + v(z, t) + \mu \frac{\partial P_z}{\partial t} = 0$$

ou, en faisant abstraction du magnétisme rémanent :

$$P_z = -\varepsilon \frac{\partial \Pi}{\partial t} + w(z, t)$$

d'où enfin, d'après (16)

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= -\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t} \\ \mathcal{M}_y &= -\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} \\ \mathcal{M}_z &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (38)$$

Le problème de la distribution du champ électromagnétique dans un diélectrique revient donc à trouver une fonction Π de r et z satisfaisant aux conditions aux limites et à l'équation différentielle (36). $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$, se déduisent ensuite de Π par les différenciations (37) et (38).

18. Il est facile de trouver une intégrale Π_0 de l'équation (36) fonction de r et t seulement.

Nous avons

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$

et deux expressions semblables pour $\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial z^2}$. D'où

$$\Delta \Pi_0 = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}.$$

Portons dans l'expression

$$\Delta \Pi_0 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial t^2} = 0$$

2

il vient

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial r} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$r\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r^2} + 2\frac{\partial \Pi_0}{\partial r} - \varepsilon\mu r \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial r^2}(r\Pi_0) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 (r\Pi_0)}{\partial t^2} = 0.$$

Nous avons déjà intégré (24) cette équation. On trouve ainsi pour Π_0

$$\Pi_0 = \frac{f_1\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f_2\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r} \tag{41}$$

Nous étudierons plus loin plusieurs cas particuliers du problème général que nous venons d'envisager. Les fonctions f_1 et f_2 seront déterminées chaque fois par les conditions aux limites.

La fonction $f\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$ représente une onde qui se propage à partir de l'origine, avec la vitesse

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

La fonction f_2 représente une onde se propageant vers l'origine avec la même vitesse.

19. Nous avons ainsi obtenu une intégrale Π_0 fonction de r et de t seulement. On obtiendra évidemment les intégrales Π fonctions de r, z et t en dérivant un nombre quelconque de fois par rapport à z et à t une fonction formée comme Π_0 avec d'autres fonctions arbitraires f des mêmes variables.

$$\Pi_{n,p} = \frac{\partial^{n+p}}{\partial z^n \partial t^p}\left[\frac{\varphi_{n,p}\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r} + \frac{\psi_{n,p}\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r}\right]$$

L'addition d'un nombre quelconque de termes de ce genre permet évidemment de représenter une source de révolution, placée à l'origine, d'un degré de complexité quelconque.

Introduction des coordonnées cylindriques. — *20.* Introduisons les coordonnées cylindriques z, ρ, φ; ρ est la distance du point à l'axe des z, et φ est l'angle que fait avec Ox la droite qui joint à l'origine la projection du point x, y, z, sur le plan des xy. On a

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Soient $\mathcal{E}_\rho$, $\mathcal{E}_\varphi$, $\mathcal{E}_z$ les composantes de la force électrique, $\mathcal{M}_\rho$, $\mathcal{M}_\varphi$, $\mathcal{M}_z$ les composantes de la force magnétique. On a, dans le cas d'un champ de révolution autour de Oz

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{M}_\rho = \mathcal{M}_z = 0$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_\varphi \sin\varphi \\ \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_\varphi \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_\varphi \sin\varphi \\ \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_\varphi \cos\varphi \end{cases}$$

Les équations (IV) deviennent :

$$\mu \frac{\partial \mathcal{M}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial z}$$

et les équations (V) se réduisent à :

$$\mu \frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{M}_\varphi}{\partial z}.$$

Les expressions de $\mathcal{E}_\rho$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{E}_\varphi$, en fonction de Π s'écrivent, d'après les équations (20) (15) (18)

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_\rho &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial\rho\partial z} \\ \mathcal{E}_z &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \\ \mathcal{M}_\varphi &= -\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial\rho\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Introduction des coordonnées polaires.— *21*. On passe des coordonnées cylindriques ρ, φ, z aux coordonnées polaires r, θ, φ (r étant la distance à l'origine et θ la colatitude) en posant

$$\left.\begin{aligned} \rho &= r\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

d'où

$$\rho \frac{\partial}{\partial\rho} = (1-\mu^2)\left(r\frac{\partial}{\partial r} - \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)$$

en posant

$$\mu = \cos\theta.$$

Soient $\mathcal{E}_r$, $\mathcal{E}_\theta$, $\mathcal{E}_\varphi$; $\mathcal{M}_r$, $\mathcal{M}_\theta$, $\mathcal{M}_\varphi$ les nouvelles coordonnées de la force électrique et de la force magnétique. On a

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_\theta = 0$$

et

$$\mathcal{M}_{\varphi} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial t} \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_{\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right) \\ \mathcal{E}_{r} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right) \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

IV. — Théorème de Poynting

9. L'énergie totale contenue dans un volume donné se compose de l'énergie électrique, qui a pour expression

$$\int \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2)\, d\tau$$

et de l'énergie magnétique

$$\int \frac{\mu}{8\pi} (\mathcal{M}_x^2 + \mathcal{M}_y^2 + \mathcal{M}_z^2)\, d\tau$$

les deux intégrales étant étendues au volume considéré.

Elle a donc pour valeur

$$\int \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2)\, d\tau + \int \frac{\mu}{8\pi} (\mathcal{M}_x^2 + \mathcal{M}_y^2 + \mathcal{M}_z^2)\, d\tau$$

La variation de cette énergie avec le temps est égale à :

$$\int \frac{\varepsilon}{8\pi} . 2 . \left(\mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} + \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} + \mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}\right) d\tau + \int \frac{\mu}{8\pi} . 2 . \left(\mathcal{M}_x \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial t} + \mathcal{M}_y \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial t} + \mathcal{M}_z \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial t}\right) d\tau$$

en remplaçant $\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t}\ \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t}\ \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial t}\ \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial t}\ \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial t}$ par leurs valeurs IV et V

$$\int \frac{1}{4\pi} d\tau \left\{ \mathcal{E}_x \left(-\frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial z}\right) + \mathcal{E}_y \left(-\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial x}\right) + \mathcal{E}_z \left(-\frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial y}\right) \right.$$

$$\left. + \mathcal{M}_x \left(-\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}\right) + \mathcal{M}_y \left(-\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}\right) + \mathcal{M}_z \left(-\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}\right) \right\}$$

$$= \int \frac{1}{4\pi} d\tau \left(-\mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial x} - \mathcal{M}_y \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial x} + \mathcal{M}_z \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} \right.$$

$$- \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial y} - \mathcal{M}_z \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + \mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial y} + \mathcal{M}_x \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}$$

$$\left. - \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial z} - \mathcal{M}_x \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} + \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial z} + \mathcal{M}_y \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \right)$$

$$= \int \frac{1}{4\pi} d\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(-\mathcal{E}_z \mathcal{M}_y + \mathcal{E}_y \mathcal{M}_z) + \frac{\partial}{\partial y}(-\mathcal{E}_x \mathcal{M}_z + \mathcal{E}_z \mathcal{M}_x) + \frac{\partial}{\partial z}(-\mathcal{E}_y \mathcal{M}_x + \mathcal{E}_x \mathcal{M}_y) \right\}$$

Soient l, m, n, les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface qui limite le volume auquel s'étend l'intégrale. Posons d'autre part

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{4\pi}(-\mathcal{E}_z\mathcal{M}_y + \mathcal{E}_y\mathcal{M}_z) = Q_x \\ \frac{1}{4\pi}(-\mathcal{E}_x\mathcal{M}_y + \mathcal{E}_y\mathcal{M}_x) = Q_y \\ \frac{1}{4\pi}(-\mathcal{E}_y\mathcal{M}_x + \mathcal{E}_x\mathcal{M}_y) = Q_z \end{array}\right.$$

Q_x, Q_y, Q_z sont les composantes d'un vecteur que nous appellerons le vecteur radiant ; il est perpendiculaire à la fois au champ électrique et au champ magnétique, et égal, au facteur $\frac{1}{4\pi}$ près, à l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

L'intégrale ci-dessus a pour expression (en appliquant à la dernière intégrale le théorème de Stokes.)

$$\int d\omega\,(lQ_x + mQ_y + nQ_z)$$

L'énergie qui traverse la surface par unité de temps est donc égale au flux du vecteur radiant. C'est le théorème de **Poynting**.

V. — Propagation dans les conducteurs. Diffusion

22. Dans les conducteurs, le courant de déplacement est nul, et les équations (I) et (II) du champ électromagnétique deviennent

$$\left.\begin{array}{l} \mu\frac{\partial\mathcal{M}_x}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial y} \\ \mu\frac{\partial\mathcal{M}_y}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z} \\ \mu\frac{\partial\mathcal{M}_z}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x} \end{array}\right| \qquad \text{(VI)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4\pi c\mathcal{E}_x = -\frac{\partial\mathcal{M}_z}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{M}_y}{\partial z} \\ 4\pi c\mathcal{E}_y = -\frac{\partial\mathcal{M}_x}{\partial z} + \frac{\partial\mathcal{M}_z}{\partial x} \\ 4\pi c\mathcal{E}_z = -\frac{\partial\mathcal{M}_y}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{M}_x}{\partial y} \end{array}\right| \qquad \text{(VII)}$$

Dérivons la première équation (VII) par rapport à t et remplaçons dans le résultat $\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial t}$ et $\frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial t}$ par leurs valeurs (VI). Il vient

$$4\pi c \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left\{-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}\right)\right\}$$

ou

$$4\pi\mu c \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} = \Delta \mathcal{E}_x - \frac{\partial}{\partial x}(\text{div. } \mathcal{E})$$

ou, comme, à l'intérieur du conducteur div. $\mathcal{E} = 0$.

$$4\pi\mu c \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} = \Delta \mathcal{E}_x. \qquad (47)$$

On trouverait des expressions semblables pour $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$.

Ces équations signifient que *l'électricité se propage dans les conducteurs par diffusion, à la façon de la chaleur.* Elles sont les mêmes que celle que **Fourier** a trouvées pour représenter la propagation de la chaleur dans les corps.

Cas d'un champ de révolution autour de Oz. — *23.* On a, ici, comme au § 16

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \frac{\partial P_z}{\partial y} \\ \mathcal{M}_y &= \frac{\partial P_z}{\partial x} \\ \mathcal{M}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \mathcal{E}_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \mathcal{E}_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial P_z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

et, la force électrique étant dans le plan méridien,

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \mathcal{E}_y &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\ \mathcal{E}_z &= -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

ψ étant une fonction de r et z. Soit U la fonction r et z qui satisfait à l'équation

$$\Delta\psi - 4\pi\mu c \frac{\partial \psi}{\partial t} = U$$

les équations (47) donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0 \\ &\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0 \\ &\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right.$$

La fonction U que ces équations déterminent est

$$U = f(z, t) + \varphi(t) \log(x^2 + y^2) + \chi(t)$$

lorsqu'on tient compte de la symétrie ; f, φ, χ représentent des fonctions arbitraires dont on ne change pas le caractère en les écrivant :

$$\left\{\begin{aligned} &f = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 4\pi\mu c \frac{\partial}{\partial t}\right) f_1(z, t) = \left(\Delta - 4\pi\mu c \frac{\partial}{\partial t}\right) f_1(z, t) \\ &\varphi = -4\pi\mu c \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t) = \left(\Delta - 4\pi\mu c \frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi_1(t) \\ &\chi = -4\pi\mu c \frac{\partial}{\partial t} \chi_1(t) = \left(\Delta - 4\pi\mu c \frac{\partial}{\partial t}\right) \chi_1(t) \end{aligned}\right.$$

d'où

$$U = \left(\Delta - 4\pi\mu c \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[f_1(z, t) + \varphi_1(t) \log(x^2 + y^2) + \chi_1(t)\right]$$

ce qui conduit à poser

$$\psi = \Pi' + f_1(z, t) + \varphi_1(t) \log(x^2 + y^2) + \chi_1(t)$$

avec

$$\Delta\Pi' - 4\pi\mu c \frac{\partial \Pi'}{\partial t} = 0. \tag{49}$$

Or, quand nous remontons de ψ à $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ par les formules (48), tous les termes en φ_1, ψ_1, χ_1 disparaissent, et il nous reste seulement

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x \partial z} \\ \mathcal{E}_y &= \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial y \partial z} \\ \mathcal{E}_z &= -\left(\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial y^2}\right) \end{aligned}\right| \tag{50}$$

Comparons ces expressions aux expressions (17). Nous voyons que φ ne diffère de $\frac{\partial \Pi'}{\partial z}$ que par une fonction de z et t seulement :

$$\varphi = \frac{\partial \Pi'}{\partial z} + u(z, t).$$

Les dernières équations des groupes (17) et (50) donnent ensuite

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial z^2} + v(z, t) + \mu \frac{\partial P_z}{\partial t} = 0$$

ou, d'après l'expression (49)

$$-4\pi\mu c \frac{\partial \Pi'}{\partial t} + v(z, t) + \mu \frac{\partial P_z}{\partial t} = 0$$

ou, en faisant abstraction du magnétisme remanent

$$P_z = 4\pi c \Pi' + w(z, t)$$

d'où enfin, d'après les équations (16)

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= 4\pi c \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \\ \mathcal{M}_y &= 4\pi c \frac{\partial \Pi'}{\partial y} \\ \mathcal{M}_z &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (51)$$

Le problème de la distribution du champ électromagnétique dans un conducteur revient donc à trouver une fonction Π' de r et z satisfaisant à l'équation (49) et aux conditions aux limites. $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ se déduisent ensuite de Π par les différentiations (50) et (51).

24. En coordonnées cylindriques z, ρ, φ

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_\varphi &= \mathcal{M}_\rho = \mathcal{M}_z = 0 \\ \mathcal{E}_\rho &= \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \rho \partial z} \\ \mathcal{E}_z &= \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial z^2} - 4\pi\mu c \frac{\partial \Pi'}{\partial t} \\ \mathcal{M}_\varphi &= 4\pi c \frac{\partial \Pi'}{\partial \rho} \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

25. En coordonnées sphériques r, θ, φ

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_\varphi &= \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_\theta = 0 \\ \mathcal{E}_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\rho \frac{\partial \Pi'}{\partial \rho}\right) \\ \mathcal{E}_\theta &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{\partial \Pi'}{\partial \rho}\right) \\ \mathcal{M}_\varphi &= 4\pi c \frac{\partial \Pi'}{\partial \rho} \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

VI. — Cas de la haute fréquence

26. Considérons le cas où un conducteur est parcouru par des oscillations électriques très rapides. On peut alors supposer F, G, H proportionnels à $e^{j\omega t}$, en posant

$$\omega = -\alpha + \beta j,$$

α représente un coefficient d'amortissement, et

$$\beta = 2\pi n,$$

n étant la fréquence des oscillations. Si les oscillations sont très rapides, ω est très grand en valeur absolue.

Dans ces conditions, les équations (VI) deviennent, dans les conducteurs

$$j\mu\omega\mathcal{M}_x = -\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}.$$

. . . .

Le deuxième terme étant fini, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ et leurs dérivées n'étant pas infiniment grands, le premier terme doit être également fini, et, comme ω est très grand, $\mathcal{M}_x$ doit être très petit. $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$ sont donc négligeables à l'intérieur des conducteurs.

Dans le cas d'oscillations très rapides, la *force magnétique est nulle à l'intérieur des conducteurs.*

27. Nous déduisons ensuite, des équations (VII)

$$\left.\begin{array}{l} 4\pi i_x = \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\mathcal{M}_z} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \text{(VII)}$$

où l'on fait $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_z = 0$.

Que, dans le cas d'oscillations très rapides, *le courant est nul à l'intérieur des conducteurs.*

28. La densité de courant étant égale au produit de la force électrique $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ par la conductibilité c, qui n'est pas infiniment petite, on en déduit que :

Dans le cas d'oscillations très rapides, *la force électrique est nulle à l'intérieur des conducteurs.*

29. L'équation

$$\frac{\varepsilon}{4\pi}\, d\omega \,.\, \mathcal{E} = \rho$$

montre ensuite que

Dans le cas d'oscillations très rapides, *il n'y a pas d'électricité libre à l'intérieur des conducteurs.*

30. Puisqu'il n'y a, ni courant, ni électricité libre, soit à l'intérieur des conducteurs, ni dans les diélectriques, on déduit de ces propositions que :

Dans le cas d'oscillations très rapides, *le courant et l'électricité libre sont concentrés à la surface des conducteurs.*

31. Nous savons d'ailleurs que dans le cas où nous prenons pour le potentiel vecteur P_x, P_y, P_z la forme que lui a donné Lorenz

P_x, P_y, P_z sont les potentiels retardés des composantes du courant de conduction i_x, i_y, i_z

φ et le potentiel retardé de la densité de charge électrique ρ.

Dans le cas particulier que nous considérons actuellement, où i_x, i_y, i_z, ρ sont proportionnels à $e^{i\omega t}$, le potentiel retardé d'une quelconque de ces fonctions que nous désignerons par $\psi(x, y, z)\, e^{i\omega t}$ aura la forme

$$\int e^{i\omega t}\psi(x'y'z')\,\frac{e^{-i\omega t}}{r}\,dx'dy'dz'.$$

Le potentiel retardé revient donc à un potentiel ordinaire, où la fonction de forces serait $\frac{e^{-i\omega t}}{r}$ au lieu de $\frac{1}{r}$.

Les courants de conduction et l'électricité libre étant concentrés à la surface des conducteurs, nous n'avons à considérer que des surfaces attirantes, en chacun des points desquels μ représente la densité d'électricité, et I_x, I_y, I_z, est un vecteur tangent à la surface et représentant la densité superficielle du courant de conduction.

Le potentiel V dû à une surface attirante est continu quand on traverse cette surface, mais la composante normale de l'attraction est discontinue, la discontinuité étant égale à 4π multiplié par la densité superficielle de la matière attirante ; la composante tangentielle de l'attraction est continue. Donc, si on prend pour axe les z la normale à la surface, $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ sont continus, $\frac{\partial V}{\partial z}$ est discontinu.

Il en est de même pour le potentiel retardé, la différence des deux intégrales qui représentent les deux potentiels restant continue puisque $\frac{e^{i\omega t}-1}{r}$ reste fini quand r tend vers zéro.

32. Prenons la normale à la surface comme axe des z. Le potentiel vecteur P_x, P_y, P_z étant engendré par I_x, I_y, I_z, $\frac{\partial P_y}{\partial z}$ et $\frac{\partial P_x}{\partial z}$ subissent en traversant la surface des discontinuités respectivement égales à $4\pi I_y$, $4\pi I_x$; les dérivées par rapport à x et y sont continues. En remarquant que le champ

magnétique est nul à l'intérieur du conducteur, on déduit alors des équations

$$\mathcal{H}_x = \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}$$

les valeurs suivantes pour le champ magnétique à l'extérieur et tout près de la surface :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{H}_x = -4\pi I_y \\ \mathcal{H}_y = 4\pi I_x \\ \mathcal{H}_z = 0 \end{array}\right.$$

Donc

Dans le cas d'oscillations très rapides, *le champ magnétique à la surface des conducteurs, est tangent à la surface, perpendiculaire au courant de conduction et proportionnel à celui-ci.*

33. On a, de même :

$$\left|\begin{array}{l} 4\pi\varepsilon\mathcal{E}_x = -\dfrac{\partial P_x}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 4\pi\varepsilon\mathcal{E}_y = -\dfrac{\partial P_y}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 4\pi\varepsilon\mathcal{E}_z = -\dfrac{\partial P_z}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array}\right.$$

$\frac{\partial P_x}{\partial t}$, $\frac{\partial P_y}{\partial t}$, $\frac{\partial P_z}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ sont continus quand on traverse la surface ; $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ éprouve la discontinuité $4\pi e$. Donc, e étant la densité superficielle de l'électricité

$$\mathcal{E}_x = 0$$

$$\mathcal{E}_y = 0$$

$$\mathcal{E}_z = -\frac{e}{\varepsilon}.$$

Donc

Dans le cas d'oscillations très rapides, *les lignes de force aboutissent normalement à la surface des conducteurs.*

Nous utiliserons dans la suite ces théorèmes relatifs à la haute fréquence.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Maxwell. — *A treatise on electricity and magnetism*. Oxford, Clarendon, 1873. Traduction française, par Seligman-Lui : *Traité d'électricité et de magnétisme*, Paris, Gauthier-Villars, 1885.

2. H. Hertz. — *Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique des corps en repos. Nachrichten von der Kœnigl. Gesellschaft*, mars 1890 et *Lumière électrique*, du 19 juillet 1890 et numéros suivants.

3. H. Poincaré. — *Les oscillations électriques*, Paris, 1894. — *Electricité et optique*, 2e édition, Paris, 1901.

4. M. Brillouin. — *Propagation de l'électricité*, Paris, 1904.

CHAPITRE II

PRINCIPES DES RADIOCOMMUNICATIONS A TRAVERS UN DIÉLECTRIQUE PARFAIT

I. — *Champ électromagnétique des oscillateurs ouverts et fermés.*

1° Champ électromagnétique des oscillateurs ouverts. Propagation dans un diélectrique indéfini entourant la source.

I. *Champ électromagnétique d'un élément de courant.*

Calcul du champ. Distribution. Puissance rayonnée.

II. *Champ électromagnétique d'un élément de courant périodique.*

Le champ électromagnétique à petite distance et à grande distance de l'oscillateur. Energie rayonnée. Mécanisme de la propagation.

III. *Champ électromagnétique d'un élément de courant périodique amorti.*

2° Champ électromagnétique des oscillateurs fermés.

I. *Circuit élémentaire périodique.*

Expression du champ électromagnétique. Energie rayonnée.

II. *Circuit élémentaire périodique amorti.*

II. — *Radiocommunications au moyen d'oscillateurs ouverts ou fermés*

1° Radiocommunications par oscillateurs ouverts.

I. *Le problème de la transmission.*

Différentes formes de l'énergie dans un oscillateur. Alimentation par une source à force électromotrice périodique. Oscillations libres.

II. *Le problème de la réception.*

Energie absorbée. Cas où le champ incident est sinusoïdal. Réception avec un détecteur d'énergie. Réception avec un détecteur de tension. Cas où le champ incident est périodique amorti.

III. *Radiocommunications par oscillateurs ouverts.*

Cas des oscillations entretenues. Résultats relatifs à l'oscillateur d'émission. Résultats relatifs à l'oscillateur de réception. Rendement et portée de la radiocommunication. Cas des oscillations amorties. Emission. Réception. Rendement.

2° Radiocommunications par oscillateurs fermés.

I. *Le problème de la transmission.*

Différentes formes de l'énergie. Oscillations libres. Alimentation par une source à force électromotrice périodique. Circuit composé de plusieurs spires.

II. *Le problème de la réception.*

Cas des oscillations entretenues. Force électromotrice induite. Courant. Puissance. Rendement. Circuit composé de plusieurs spires. Cas des oscillations amorties. Force électromotrice induite. Courant.

3° Théorie générale des radiocommunications à travers un diélectrique parfait.

I.— Champs électromagnétiques des oscillateurs ouverts et des oscillateurs fermés

1° Champ électromagnétique d'un oscillateur ouvert. Propagation dans un diélectrique indéfini.

1. L'étude du champ électromagnétique à grande distance d'un conducteur parcouru par un courant variable a été faite par **Hertz** (1) dans le cas où le conducteur est infiniment petit par rapport à la longueur d'onde de l'oscillation. L'application au cas d'un conducteur fini se déduit immédiatement de l'étude de Hertz. Ce savant avait appliqué plus particulièrement les résultats de son travail au problème de l'émission d'ondes non amorties. L'extension aux ondes amorties a fait l'objet de travaux de **K. Pearson et Miss Alice Lee** (2), d'une part, **A. E. H. Love** (3) d'autre part.

I. — Champ électromagnétique d'un élément de courant

a) Calcul du champ. — *2*. Supposons qu'un élément de courant de longueur $2l$ et d'intensité $\mathfrak{J}$ soit placé à l'origine des coordonnées et dirigé suivant l'axe des z, à l'intérieur d'un diélectrique indéfini.

Le champ étant de révolution autour de Oz nous savons (Ch. I, § 8 et 9) que les composantes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$ peuvent se déduire d'une fonction auxiliaire Π par les relations

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \\ \mathcal{E}_y &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \\ \mathcal{E}_z &= -\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\right) \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} \\ \mathcal{M}_y &= \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t} \\ \mathcal{M}_z &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

On a d'ailleurs

$$\Pi = \frac{f_1\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) + f_2\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r} \qquad (3)$$

r étant la distance du point considéré à l'origine.

Il s'agit de déterminer les fonctions $f_1\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$, $f_2\left(r + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$ par les conditions aux limites.

3. La fonction $f_1\left(-\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + r\right)$ représente une onde qui se propage dans le sens des r croissants ; la fonction $f_2\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + r\right)$ représente une onde qui se propage en sens inverse. Si l'on suppose indéfini le diélectrique qui entoure la source d'émission, aucune réflexion n'intervient, et la fonction f_2 est nulle. C'est ce qui se produit dans le cas présent où nous étudions le champ d'un élément de courant isolé dans l'espace.

Nous pouvons donc poser

$$\Pi = \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)}{r} \qquad (4)$$

et nous aurons trouvé la solution du problème quand nous aurons déterminé la fonction f de manière à satisfaire aux conditions aux limites.

Conditions aux limites. — *4*. Il résulte de la forme

$$\Pi = \frac{f\left(r - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r}$$

et de l'équation (17) ch. I, que, à faible distance de l'origine, $\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}$ est négligeable devant $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$ et que, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, se réduisent à

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \mathcal{E}_y &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \mathcal{E}_z &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

D'autre part nous avons vu que φ est le potentiel électrostatique retardé.

Pour satisfaire aux conditions aux limites, nous évaluerons le potentiel φ et écrirons que les composantes du champ électrique sont égales à ses dérivées par rapport à x, y, z.

Le champ électrostatique se détermine de la manière suivante. L'élément de courant considéré est équivalent, au point de vue électrostatique, à deux quantités d'électricité $+ Q$, $- Q$ distantes de $2\,l$ et situées sur l'axe des z de part et d'autre de l'origine

$$Q = \int \mathcal{I} dt.$$

La masse $+ Q$, supposée située à l'origine, dans un milieu de constante diélectrique ε, créerait en un point M du plan des y, z et de coordonnées y et z un potentiel égal à $-\frac{Q}{r} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$; $(r^2 = y^2 + z^2)$. La même masse $+ Q$ située sur l'axe des z à la distance l de l'origine $(z = l)$ crée au même point M un potentiel

$$-\left\{\frac{Q}{r} + \frac{d}{dz}\left(\frac{Q}{r}\right) l\right\} \frac{1}{\varepsilon}.$$

De même, la masse $- Q$ placée sur l'axe Oz à la distance $- l$ de l'origine, crée au point M un potentiel égal à

$$-\left\{-\frac{Q}{r} + \frac{d}{dz}\left(\frac{Q}{r}\right) l\right\} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Le potentiel résultant de l'action des deux masses est la somme des deux précédents, soit

$$-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right) \times 2\,lQ \cdot \frac{1}{\varepsilon}. \tag{6}$$

Q est une fonction de $\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Nous obtiendrons le potentiel retardé φ en remplaçant $\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ par $\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$

$$\varphi = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right) \times 2\,lQ\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ ont pour valeur, à proximité de l'origine, en ne gardant que les termes d'ordre supérieur en $\frac{1}{r}$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{3xz}{r^5} \cdot 2\,lQ\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\frac{1}{\varepsilon} \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial y} &= \frac{3yz}{r^5} \cdot 2\,lQ\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} &= \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) \cdot 2\,lQ\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

5. Ecrivons maintenant les valeurs de $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ en fonction de f. Nous avons, d'après l'équation (4)

$$\Pi = \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)}{r}$$

et, d'après les expressions (1)

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial z} \\
\mathcal{E}_y &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial z} \\
\mathcal{E}_z &= -\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}\right.$$

d'où, en effectuant les dérivations indiquées

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= \frac{xz}{r^5}\left(3f + 3rf' + r^2f''\right) \\
\mathcal{E}_y &= \frac{yz}{r^5}\left(3f + 3rf' + r^2f''\right) \\
\mathcal{E}_z &= -\frac{x^2 + y^2}{r^5}\left(3f + 3rf' + r^2f''\right) + \frac{2}{r^3}\left(f + rf'\right)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

les signes f' et f'' indiquant des dérivations par rapport à la variable

$$\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right).$$

A distance suffisamment petite de l'origine, les termes en $\frac{1}{r^3}$ sont prédominants, de sorte que les trois composantes du champ se réduisent à

$$\begin{cases} \frac{xz}{r^5} \cdot 3f \\ \frac{yz}{r^5} \cdot 3f \\ -\frac{x^2+y^2}{r^5} \cdot 3f + \frac{2}{r^3} f = \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) f. \end{cases}$$

Il nous reste pour satisfaire aux conditions aux limites à identifier ces expressions avec (8). On obtient ainsi

$$f = \frac{2\,lQ\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)}{\varepsilon} \tag{10}$$

b) Résultats du calcul. — **Expression de la force électrique.** — *6*. Avec la condition

$$f = \frac{2\,lQ}{\varepsilon}$$

la force électrique due à l'élément de courant est donnée par les équations (9)

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{xz}{r^5}\left[3f + 3rf' + r^2f''\right] \\ \mathcal{E}_y &= \frac{yz}{r^5}\left[3f + 3rf' + r^2f''\right] \\ \mathcal{E}_z &= -\frac{x^2+y^2}{r^5}\left[3f + 3rf' + r^2f''\right] + \frac{2}{r^3}\left[f + rf'\right] \end{aligned}\right| \tag{9}$$

Expression de la force magnétique. — *7*. Les composantes de l'intensité du champ magnétique sont

$$\begin{cases} \mathcal{H}_x = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} \\ \mathcal{H}_y = \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t} \\ \mathcal{H}_z = 0 \end{cases}$$

Remplaçant Π par $\frac{1}{r} f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$ et effectuant les dérivations indiquées, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= +\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{y}{r^3}\left[f' + rf''\right] \\ \mathcal{H}_y &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{x}{r^3}\left[f' + rf''\right] \\ \mathcal{H}_z &= 0 \end{aligned}\right| \tag{11}$$

Lignes de force électrique. — *8.* La force électrique étant dans le plan méridien et indépendante de l'azimut, les lignes de force sont situées dans les plans méridiens, et il nous suffit de chercher leur expression dans un quelconque de ces plans, par exemple le plan $y = 0$.

L'équation des lignes de force est

$$\frac{\mathcal{E}_x}{dx} = \frac{\mathcal{E}_z}{dz}.$$

Soit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nous avons dans le plan des xz, $\rho = x$ et l'équation des lignes de force s'écrit

$$\mathcal{E}_x dz - \mathcal{E}_z d\rho = 0.$$

Pour écrire cette équation nous écrirons $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_z$ en fonction de ρ et de z. Nous avons (Equations 37, ch. I)

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} = \frac{x}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \frac{x}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_z &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \cdot \frac{x}{\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \frac{y}{\rho}\right) \\
&= -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \frac{y^2}{\rho^3} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} \cdot \frac{x^2}{\rho^2} \\
&= -\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \frac{x^2}{\rho^3} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} \frac{y^2}{\rho^2} \\
&= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2}\right) \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right]
\end{aligned}$$

Portant les valeurs de $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_z$ dans l'équation (12), il vient :

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right) dz + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right) d\rho\right] = 0$$

ou, en intégrant

$$\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \text{constante}. \tag{13}$$

C'est l'équation des lignes de force.

Lignes de force magnétique. — *9.* La force magnétique étant parallèle au plan $z = 0$, l'équation des lignes de force magnétique s'écrit

$$\frac{\mathcal{M}_x}{dx} - \frac{\mathcal{M}_y}{dy} = 0.$$

Remplaçons $\mathcal{M}_x$ et $\mathcal{M}_y$ par leurs valeurs en fonction de Π : l'équation précédente devient

$$dy \cdot \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial y} + dx\, \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial x} = 0.$$

ou

$$dy \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) + dx \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) = 0.$$

En intégrant il vient :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \text{constante.}$$

C'est l'équation des lignes de force magnétique.

Comme Π est fonction seulement de t, de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, et de z, qui est constant ici, cette expression est équivalente à

$$\rho = \text{constante.}$$

Les lignes de force magnétique sont donc des circonférences ayant pour axe l'axe de l'élément de courant, et la force magnétique est perpendiculaire au plan méridien.

c) Distribution du champ électromagnétique. — *10.* En tout point du champ, *la force électrique est située dans le plan méridien, les lignes de forces sont les courbes*

$$\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \text{constante.}$$

La force magnétique est perpendiculaire au plan méridien ; les lignes de force sont des circonférences ayant pour axe l'élément du courant.

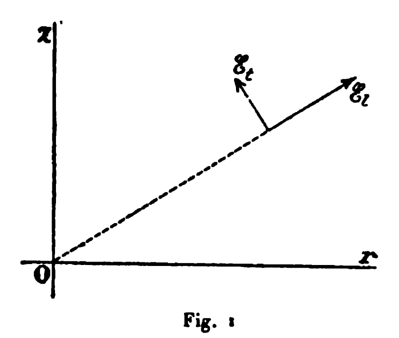


Fig. 1

Décomposons la force électrique en une force longitudinale $\mathcal{E}_l$ dirigée suivant le rayon, et une force transversale $\mathcal{E}_t$ perpendiculaire au rayon. Nous avons (fig. 1)

$$\mathcal{E}_l = \frac{2z}{r}\left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{r^2}\right)$$

$$\mathcal{E}_t = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}\left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{r}\right)$$

A grande distance, il ne reste que la force transversale,

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\frac{f'}{r} = -\frac{f'}{r}\cos\varphi \tag{14}$$

φ étant la latitude du point.

Donc, *à grande distance des lignes de force sont des circonférences, et les surfaces d'onde sont des sphères. La force électrique, maxima à l'équateur, est nulle aux pôles et varie comme le cosinus de la latitude. Elle varie en raison inverse de la distance à l'origine.*

A grande distance, *la force magnétique* a pour expression

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\frac{f'}{r} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{f'}{r}\cos\varphi. \tag{15}$$

Elle, est, au facteur $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ *près, égale à la force électrique.*

En raison de la divergence des rayons électromagnétiques issus de l'élément de courant, *l'intensité du champ électromagnétique diminue quand la distance de l'excitateur augmente, en raison inverse de cette distance*, dès qu'elle est un peu grande, ce qui est toujours le cas quand il s'agit de radiocommunications.

On voit encore que, maxima dans le plan équatorial et nulle dans la direction de l'axe de l'élément de courant, *l'intensité du champ électromagnétique varie comme le cosinus de la latitude.*

d) Puissance rayonnée, a l'instant *t*, a travers une surface d'onde donnée. — *11.* La puissance rayonnée, à l'instant *t*, à travers une surface d'onde donnée se calcule par la *formule de Poynting*, qui se réduit, les vecteurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ étant rectangulaires, à

$$P = \frac{1}{4\pi}\int \mathcal{E}\mathcal{M}dS.$$

A grande distance la surface d'onde est une sphère de rayon r ayant pour centre l'origine, et l'intégrale précédente doit être prise le long de cette surface.

En prenant comme surface élémentaire l'aire $2\pi r^2\cos\varphi d\varphi$ d'une zone élémentaire de latitude φ et d'angle au centre $d\varphi$, et effectuant les calculs, on obtient successivement les expressions suivantes :

$$P = \frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{1}{r^2}(f')^2\cos^2\varphi \,.\, 2\pi r^2\cos\varphi d\varphi$$

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(f')^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi.$$

Mais

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3}.$$

D'où

$$P = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[f''\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\right]^2.$$

Posons

$$\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r = \frac{t_1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

on a

$$f\left(\frac{t_1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = \frac{2\,l}{\varepsilon}\,Q\,(t_1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon\mu}f''\,\frac{t_1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{d^2Q}{dt^2}\,.\,2\,l$$

d'où

$$P = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon\mu}\;\mu\left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)^2.\,4\,l^2. \qquad (16)$$

Dans l'air, *en unités électromagnétiques*

$$\mu = 1 \qquad \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{\Omega}$$

Ω étant la vitesse de la lumière

$$P = \frac{2}{3}\,\frac{(2\,l)^2}{\Omega}\left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)^2. \qquad (17)$$

II. — Champ électromagnétique d'un élément de courant périodique. L'excitateur de Hertz

12. Le dispositif connu sous le nom *d'oscillateur de Hertz* se compose de deux capacités A et B réunies par un fil métallique (fig. 2).

Une coupure est ménagée en *ab* au milieu du fil.

On peut relier les deux points *ab* aux bornes d'une source de force électromotrice alternative et exciter ainsi un courant alternatif dans l'oscillateur : c'est le cas des *oscillations entretenues*.

On peut également, et c'est de cette façon que Hertz réalisa ses expériences, réunir les points *a* et *b* aux pôles d'une bobine d'induction.

Lorsque la bobine fonctionne, les capacités A et B se chargent et la prennent des potentiels égaux et de signes contraires.

Quand la différence de potentiel devient suffisante, une étincelle éclate entre les deux petites boules a et b, et le condensateur se décharge. Nous verrons plus tard que *le courant de décharge est périodique et amorti* et nous étudierons complètement le phénomène de la décharge.

Nous admettrons, pour commencer, ainsi que l'a fait Hertz dans son étude théorique du phénomène, que le courant est purement périodique, d'amplitude constante ; et nous étudierons ensuite l'influence de l'amortissement.

Il est facile de voir que, dans l'oscillateur de Hertz, le courant a la même valeur tout le long du fil conducteur, supposé court par rapport à la longueur d'onde de l'oscillateur.

Fig. 2

Considérons deux éléments M, N de l'oscillateur, symétriques par rapport au centre, et de longueur dx. Soit Cdx leur capacité réciproque, Ldx leur self-induction. Supposons la résistance négligeable, la self-induction et la capacité uniformément réparties, ce qui n'est pas tout à fait exact, mais ne changera pas l'ordre de grandeur des résultats. La différence de potentiel $\mathfrak{V}$ entre les deux éléments, supposés situés à la distance x du centre, et le courant $\mathfrak{J}$ qui les parcourt, sont donnés par les équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{l} L \dfrac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = - \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \\ C \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} = - \dfrac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x} \end{array}\right.$$

Eliminons $\mathfrak{V}$ entre ces deux équations : il vient

$$LC \frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x^2}$$

équation dont la solution est

$$\mathfrak{J} = (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)(B_1 \cos \varpi x + B_2 \sin \varpi x)$$

avec

$$\omega = \frac{\varpi}{\sqrt{LC}}.$$

Mais

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{\varepsilon\mu}},$$

λ étant la longueur d'onde de l'oscillation, et l'on sait d'ailleurs que, pour

les hautes fréquences, et dans le cas de capacités et de selfs uniformément réparties, on a, le long d'un fil

$$\sqrt{CL} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

On en tire

$$\varpi = \frac{2\pi}{\lambda}$$

et, comme

$$\varpi x = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

est toujours très petit si la longueur de l'oscillateur est petit par rapport à la longueur d'onde, on voit que $\mathfrak{J}$ peut être considéré comme indépendant du point considéré le long de l'oscillateur.

Le phénomène oscillatoire qui se produit dans l'appareil étudié peut donc être assimilé, du moins pour les points éloignés de l'oscillateur, à un élément de courant périodique.

13. Nous pouvons poser, dans l'hypothèse d'un élément de courant non amorti :

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = F \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) \qquad (18)$$

d'où

$$\Pi = \frac{1}{r} F \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) \qquad (19)$$

Si T est la période et n la fréquence de l'oscillation, l'expression précédente montre que

$$\lambda = \frac{T}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{n\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

λ est ce qu'on appelle la longueur d'onde de l'oscillation. Nous verrons plus loin la raison de cette dénomination.

Remarque. — La valeur

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = F \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

est la partie réelle de l'expression

$$-jF e^{j\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) - \frac{\pi}{2}\right]}$$

En prenant cette valeur pour f on en tirerait

$$\Pi = -\frac{jF}{r} e^{j\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) - \frac{\pi}{2}\right]}$$

On pourrait faire tous les calculs qui suivent en prenant, cette valeur pour Π, au lieu de la valeur (19), et en ne conservant que la partie réelle du résultat.

a) Le champ électromagnétique a petite distance de l'excitateur. — *14*. Dans le cas où l'on considère un point situé à faible distance de l'excitateur, les composantes du champ électrique et magnétique sont données par les expressions (9) et (11) où l'on remplace f par sa valeur (18).

b) Le champ électromagnétique a grande distance. Expressions du champ électromagnétique. — *15*. A grande distance, la force électrique se réduit à une force transversale, située dans le plan méridien, dont l'expression est :

$$\mathcal{E} = -\frac{f''}{r}\cos\varphi = F \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\cos\varphi \qquad (20)$$

et la force magnétique est perpendiculaire au plan méridien, et égale à

$$\mathcal{M} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{f''}{r}\cos\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} F \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\cos\varphi \qquad (21)$$

Amplitude du champ électromagnétique. — *16*. Les amplitudes E et H des intensités des champs électrique et magnétique ont pour valeurs

$$\left.\begin{aligned} E &= F \cdot \frac{1}{r}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos\varphi \\ M &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} F \frac{1}{r}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Exprimons ces grandeurs en fonction de l'amplitude I du courant dans l'excitateur. Nous avons, d'après (10)

$$f = \frac{2lQ}{\varepsilon}$$

d'où

$$\mathcal{J} = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{2l}\frac{\partial}{\partial t}\left[f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)\right]$$

ou

$$\mathfrak{I} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F \cdot \frac{1}{2l} \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

en tenant compte de (18).

On en déduit, en appelant I l'amplitude de l'intensité du courant

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F \cdot \frac{1}{2l} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

d'où

$$F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, 2l \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot I.$$

Portons cette valeur dans les équations (22), il vient :

$$\left.\begin{aligned} E &= 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{2l}{\lambda}\frac{1}{r} \cdot I \cos\varphi \\ M &= 2\pi \frac{2l}{\lambda}\frac{1}{r}\, I \cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

ou, si l'on remplace λ par sa valeur en fonction de la fréquence

$$\left.\begin{aligned} E &= 2\pi\mu\, 2\, l \frac{1}{r}\, nI \cos\varphi \\ M &= 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, 2l\frac{1}{r}\, nI \cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Dans *l'air* en unités CGS électromagnétiques, μ est égal à 1 et $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ est égal à la vitesse Ω de la lumière ($\Omega = 3.10^{10}$ centimètres par seconde). On a alors

$$\left.\begin{aligned} E &= 2\pi\Omega \frac{2l}{\lambda}\frac{I}{r} \cos\varphi \qquad \text{(unités CGS électromagnétiques)} \\ M &= 2\pi \cdot \frac{2l}{\lambda}\frac{I}{r} \cos\varphi \qquad \text{(unités CGS électromagnétiques)} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} E &= 2\pi \cdot 2ln \frac{I}{r} \cos\varphi \qquad \text{(unités CGS électromagnétiques)} \\ M &= 2\pi \frac{1}{\Omega}\, 2ln \frac{I}{r} \cos\varphi \qquad \text{(unités CGS électromagnétiques)} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Les amplitudes des deux vecteurs électrique et magnétique sont égales au facteur Ω près.

Propriétés du champ électromagnétique.— *17. A grande distance*, les surfaces sur lesquelles sont répartis les états de même phase dans le

milieu, c'est-à-dire les surfaces d'onde, sont des sphères, ayant pour centre le centre de l'excitateur.

En tout point du milieu *la force électrique et la force magnétique ont une direction constante, la première étant tangente au méridien, la deuxième étant tangente au parallèle de la surface d'onde qui passe par ce point.*

Les sens respectifs des vecteurs électrique et magnétique sont donnés par une règle analogue à celle du bonhomme d'Ampère : un observateur qui fait face à l'onde incidente et est traversé par le vecteur électrique a le vecteur magnétique à sa gauche.

L'intensité du champ électromagnétique, maxima à l'équateur, et nulle aux pôles, varie comme le cosinus de la latitude.

Elle varie en raison inverse de la distance à l'excitateur.

Elle dépend de la forme de l'excitateur. Dans le cas que nous avons étudié, où l'on suppose l'oscillateur linéaire et le courant le même sur toute sa longueur, elle est proportionnelle à cette longueur. Nous reviendrons sur ce sujet et nous étudierons le cas où la forme de l'excitateur est telle que les hypothèses faites ne puissent plus être admises, dans le chapitre où nous traiterons de l'influence de la forme des antennes sur le champ électromagnétique.

L'intensité du champ est inversement proportionnelle à la longueur d'onde de l'oscillation.

Elle est proportionnelle à l'intensité du courant dans l'excitateur ; il s'ensuit que, l'excitateur et la longueur d'onde d'émission restant les mêmes, la lecture d'un ampèremètre placé dans l'antenne suffira pour indiquer les différentes valeurs du champ électromagnétique dans différentes conditions.

c) ÉNERGIE RAYONNÉE PAR L'EXCITATEUR. — 1° **Puissance moyenne rayonnée, pendant un certain temps, à travers une surface d'onde donnée.**

18. La puissance rayonnée, à l'instant t, à travers une surface d'onde donnée, se calcule par la formule de Poynting, qui se réduit, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ étant rectangulaires entre eux et tangents à la surface d'onde, à

$$P = \frac{1}{4\pi}\iint \mathcal{E}\mathcal{M} dS$$

et la puissance moyenne rayonnée entre les instants o et t est

$$P_{mt} = \frac{1}{4\pi t}\int_0^t dt \iint \mathcal{E}\mathcal{M} dS.$$

Mais, à grande distance

$$\mathcal{E} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{2l}{\lambda} \frac{1}{2} \mathrm{I} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) \cos \varphi$$

$$\mathcal{M} = 2\pi \frac{2l}{\lambda} \frac{1}{2} \mathrm{I} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) \cos \varphi$$

et la surface d'onde est une sphère de rayon r ayant pour centre l'origine. L'intégrale double qui fait partie de l'expression précédente doit être prise le long de cette surface.

En prenant comme surface élémentaire la surface $2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi$ d'une zone élémentaire de latitude φ et d'angle au centre $d\varphi$, et effectuant les calculs, on obtient successivement les expressions suivantes :

$$\mathrm{P}_{mt} = \frac{1}{4\pi t} \int_0^t dt \iint \mathcal{E}\mathcal{M}\, 2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi$$

$$\mathrm{P}_{mt} = \frac{1}{4\pi t} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, 4\pi^2 \frac{4l^2}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} \mathrm{I}^2\, 2\pi r^2 \int_0^t \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi.$$

Mais

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\mathrm{P}_{mt} = \frac{4\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4l^2}{\lambda^2} \mathrm{I}^2$$

$$\mathrm{P}_{mt} = \frac{8\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{4l^2}{\lambda^2} \mathrm{I}^2_{eff}.$$

2° Puissance moyenne rayonnée, à l'instant t, par les différentes surfaces d'ondes.

19. La puissance P rayonnée, à l'instant t, à travers une surface d'onde de rayon r est

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mathcal{E}\mathcal{M} dS$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, 4\pi^2 \cdot \frac{4l^2}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} \mathrm{I}^2 \cdot 2\pi r^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi$$

$$\mathrm{P} = \frac{8\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4l^2}{\lambda^2} \mathrm{I}^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right).$$

La puissance moyenne rayonnée, à l'instant t, par les différentes surfaces d'ondes comprises entre r_1 et r_2 est

$$P_{mr} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} P dr$$

$$P_{mr} = \frac{1}{r_2 - r_1} \frac{8\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4l^2}{\lambda^2} I^2 \int_{r_1}^{r_2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) dr$$

ou, en remplaçant l'intégrale par sa valeur $\frac{r_2 - r_1}{2}$

$$P_{mr} = \frac{4\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4l^2}{\lambda^2} I^2.$$

En comparant les deux expressions trouvées, on trouve

$$P_{mt} = P_{mr} = \frac{4\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4l^2}{\lambda^2} I^2 \qquad (27)$$

$$P_{mt} = P_{mr} = \frac{8\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4l^2}{\lambda^2} I^2_{eff} \qquad (28)$$

ou

$$P_{mt} = P_{mr} = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon\mu} \times \mu . 4l^2\omega^2 I^2_{eff} \qquad (29)$$

puisque

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

3° Variation de l'énergie émise avec la latitude.

20. Nous avons vu § 18 que la puissance rayonnée au temps t, à travers une zone élémentaire de rayon r de latitude φ et d'angle au centre $d\varphi$ est :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} . 4l^2 . I^2 \sin^2 (\omega t - r) \cos^2 \varphi d\varphi.$$

On voit que l'énergie rayonnée dans les directions qui font l'angle φ avec le plan équatorial est proportionnelle à $\cos^2 \varphi$. Nulle dans la direction zénithale, elle est maxima dans le plan de l'équateur.

La courbe polaire (fig. 3) représente les variations de $\cos^2 \varphi$ et par conséquent de l'énergie rayonnée suivant les différentes latitudes à travers une surface donnée.

d) Mécanisme de la propagation. — *21*. Nous étudierons le mécanisme de la propagation en traçant les lignes de force, et en les suivant dans leurs déplacements et leurs déformations.

Nous avons vu § 8, que l'équation des lignes de force est donnée par l'équation

$$\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \text{constante.}$$

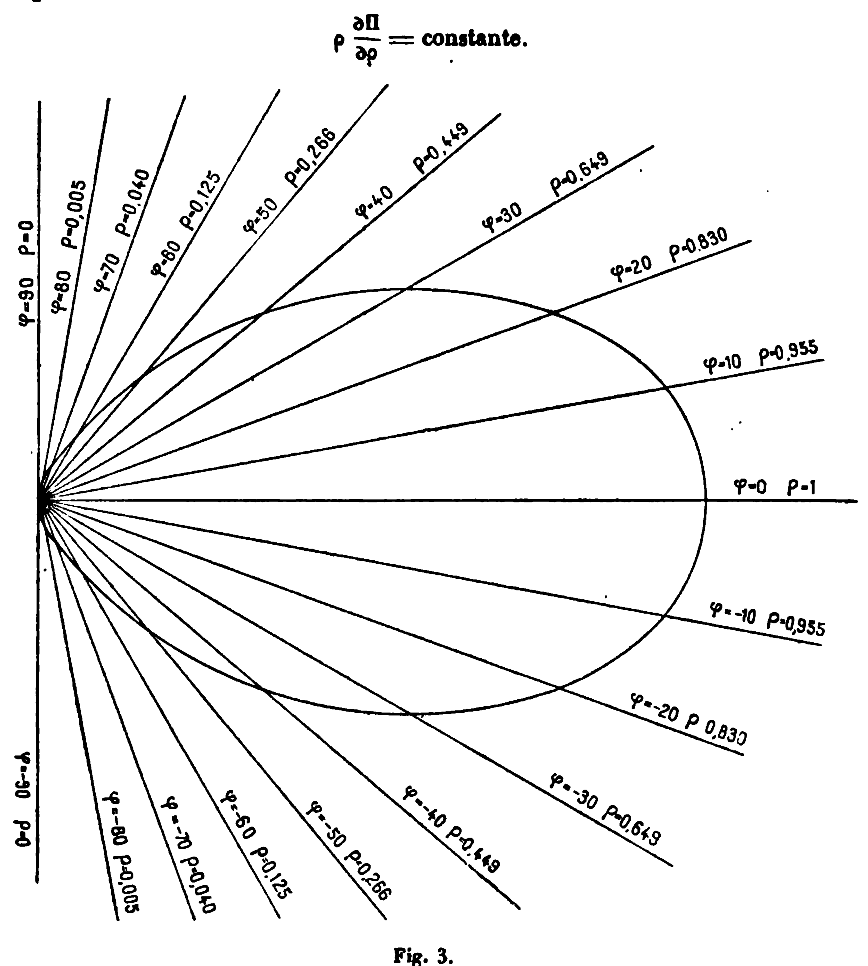


Fig. 3.

En remplaçant dans cette équation Π par sa valeur tirée de l'équation (19), nous obtenons l'équation des lignes de force dans notre cas particulier :

$$F \cdot \frac{r^2 - z^2}{r^2} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) + \frac{1}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) \right] = P$$

ou

$$\cos^2 \varphi \cdot \left[\cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) + \frac{1}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) \right] = \frac{P \cdot \lambda}{2\pi F} = R \quad (30)$$

P étant une constante particulière à chaque ligne de force, et qui caractérise la ligne de force.

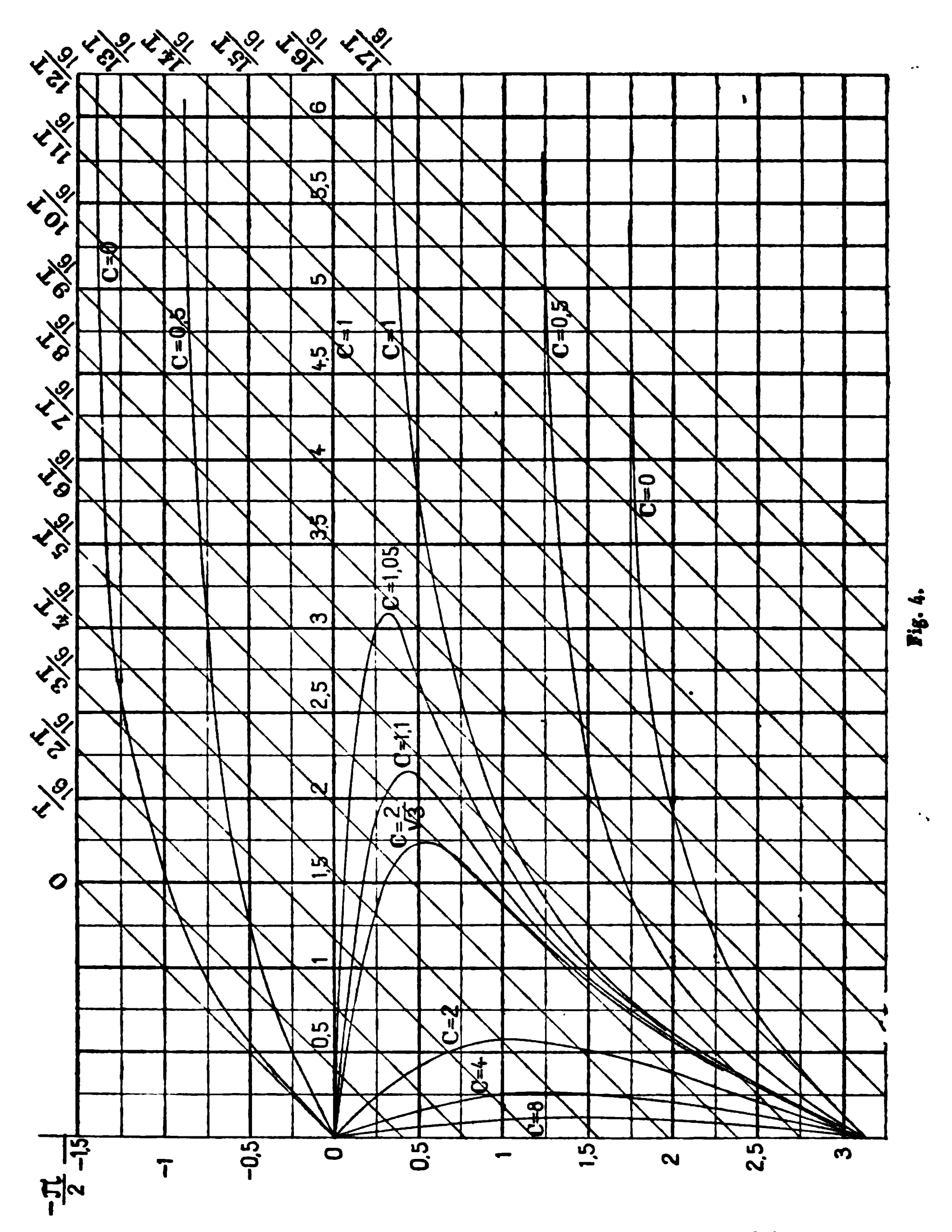


Fig. 4.

L'équation (3o) donne les lignes de force, en coordonnées polaires r et φ.

Construisons, avec Hertz, les courbes auxiliaires (fig. 4).

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \frac{\lambda}{2\pi r} \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = C \qquad (31)$$

pour différentes valeurs de C.

En prenant comme coordonnées les expressions

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) \quad \text{et} \quad \frac{2\pi r}{\lambda}.$$

Les seules parties intéressantes de ces courbes sont celles qui correspondent à

$$\frac{2\pi r}{\lambda} > 0, \quad t > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi r}{\lambda} > 0, \left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\right] + \left[\frac{2\pi r}{\lambda}\right] > 0.$$

Les courbes partent toutes de zéro pour

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = 0.$$

Celles qui correspondent à des valeurs de C comprises entre zéro et 1 ont deux branches positives, qui atteignent l'infini avec des asymptotes horizontales ; l'une pour une valeur de l'ordonnée comprise entre o et $-\frac{\pi}{2}$, l'autre pour une valeur de l'ordonnée comprises entre π et o.

Celles qui correspondent à des valeurs de C comprises entre o et $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ont une branche positive pour les valeurs de l'ordonnée comprises entre o et π. Elle part de l'origine, se dirige du côté des $\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)$ positifs, atteint un maximum, et rejoint l'axe des ordonnées pour

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = \pi.$$

Elle a deux tangentes inclinées à 45°.

Enfin les courbes C qui correspondent à des valeurs de C comprises entre $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et l'infini ont une branche positive partant de l'origine, se dirigeant vers les $\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)$ positifs quand l'ordonnée croît, passant par un maximum, puis rétrogradant vers l'axe des ordonnées qu'elle atteint pour

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = \pi.$$

Elles n'ont pas de tangentes inclinées à 45°.

Les courbes isochrones $t =$ constante sont les droites

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \frac{2\pi r}{\lambda} = \text{constante}$$

inclinées à 45° sur les axes de coordonnées. Elles sont représentées sur la figure 4.

Nous pouvons, en nous aidant des courbes auxiliaires C, tracer facilement les lignes de force (30), correspondant à l'époque $t = t_1$. Elles peuvent s'écrire

$$\cos^2 \varphi \,.\, C = R. \tag{32}$$

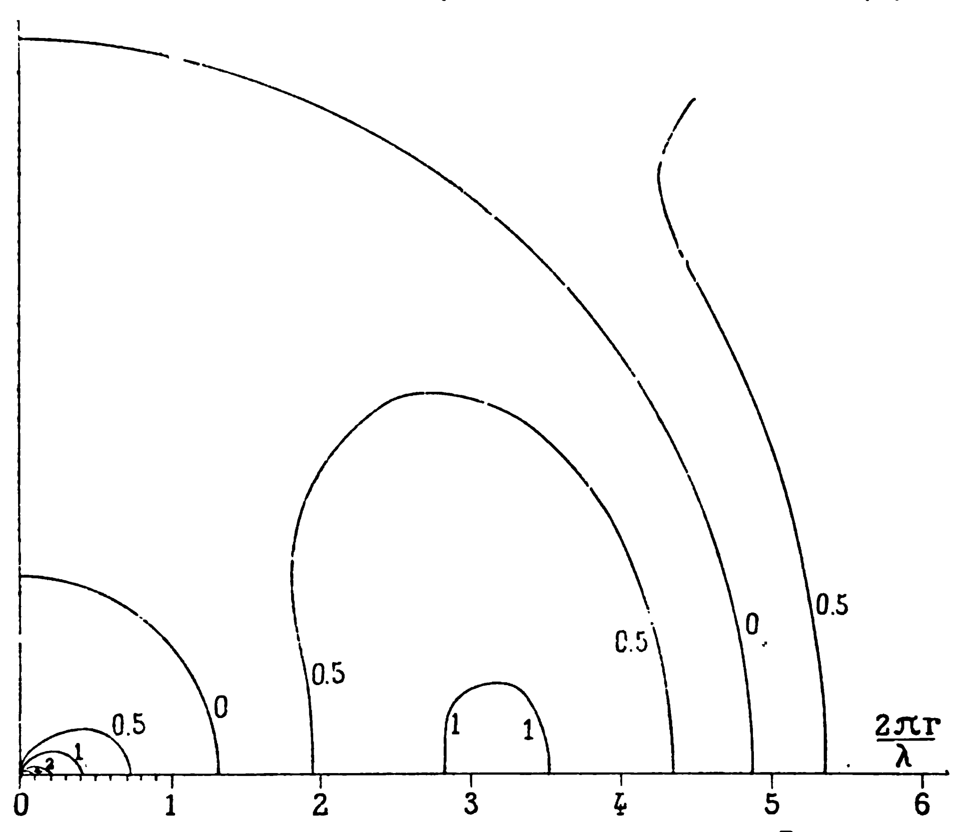


Fig. 5. — Lignes de force d'un élément de courant périodique. Temps $\frac{T}{16}$

Soit en effet R la constante caractéristique d'une ligne de force. Cherchons les points M_1, M_2 ... situés sur une droite faisant l'angle φ avec l'axe des abscisses. L'équation (32) nous donne la valeur de C.

La courbe correspondant à la valeur C coupe la droite $t = t_1$ (fig. 4) en

des points dont les abscisses représentent $\frac{2\pi r_1}{\lambda}$, $\frac{2\pi r_2}{\lambda}$, etc..., r_1, r_2... étant les distances à l'origine des points M_1, M_2... Ces points sont ainsi complètement déterminés par leurs rayons vecteurs et l'angle φ de ceux-ci avec Ox.

Nous avons ainsi tracé (fig. 5 à 12 et planche I (¹)), pour les temps

$$\frac{T}{16} \quad \frac{2T}{16} \quad \frac{3T}{16} \quad \frac{4T}{16} \quad \frac{5T}{16} \quad \frac{6T}{16} \quad \frac{7T}{16} \quad \frac{8T}{16}$$

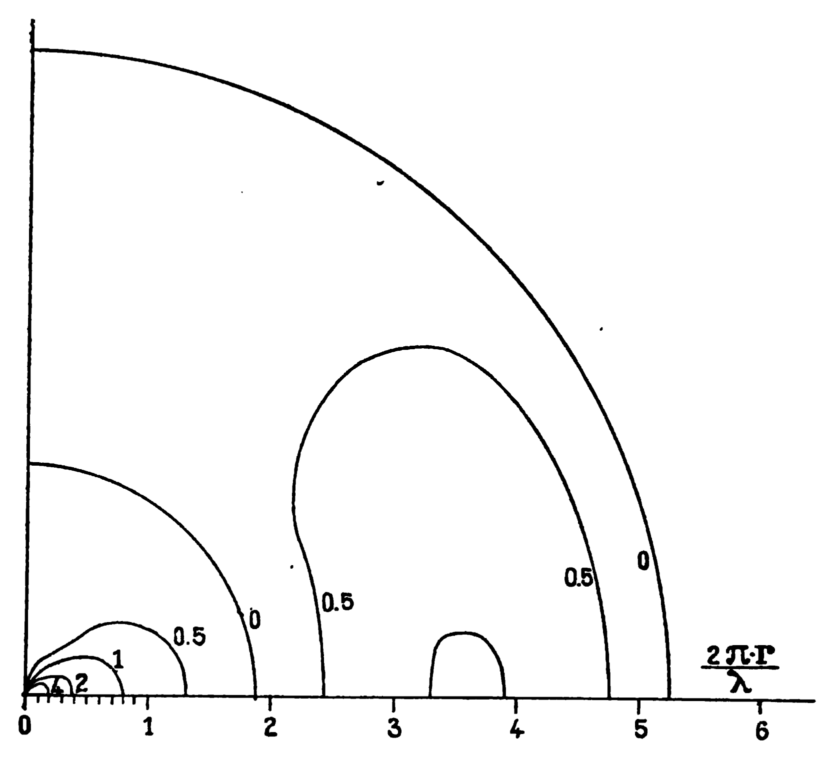


Fig. 6. — Lignes de force d'un élément de courant périodique. Temps $\frac{2T}{16}$

les lignes de force correspondant aux valeurs de R suivantes :

$$0 \quad 0{,}5 \quad 1 \quad 1{,}05 \quad 2 \quad 4$$

(¹) Les figures 5 à 12 sont réunies ensemble et constituent la planche I qu'on trouvera à la fin du volume.

22. La propagation de ces lignes de force se fait de différentes manières pour les différentes valeurs de R (fig. 5 à 12 et planche I).

1° $R > \frac{2}{\sqrt{2}}$. (Exemples $R = 2$, $R = 4$). La ligne de force part de

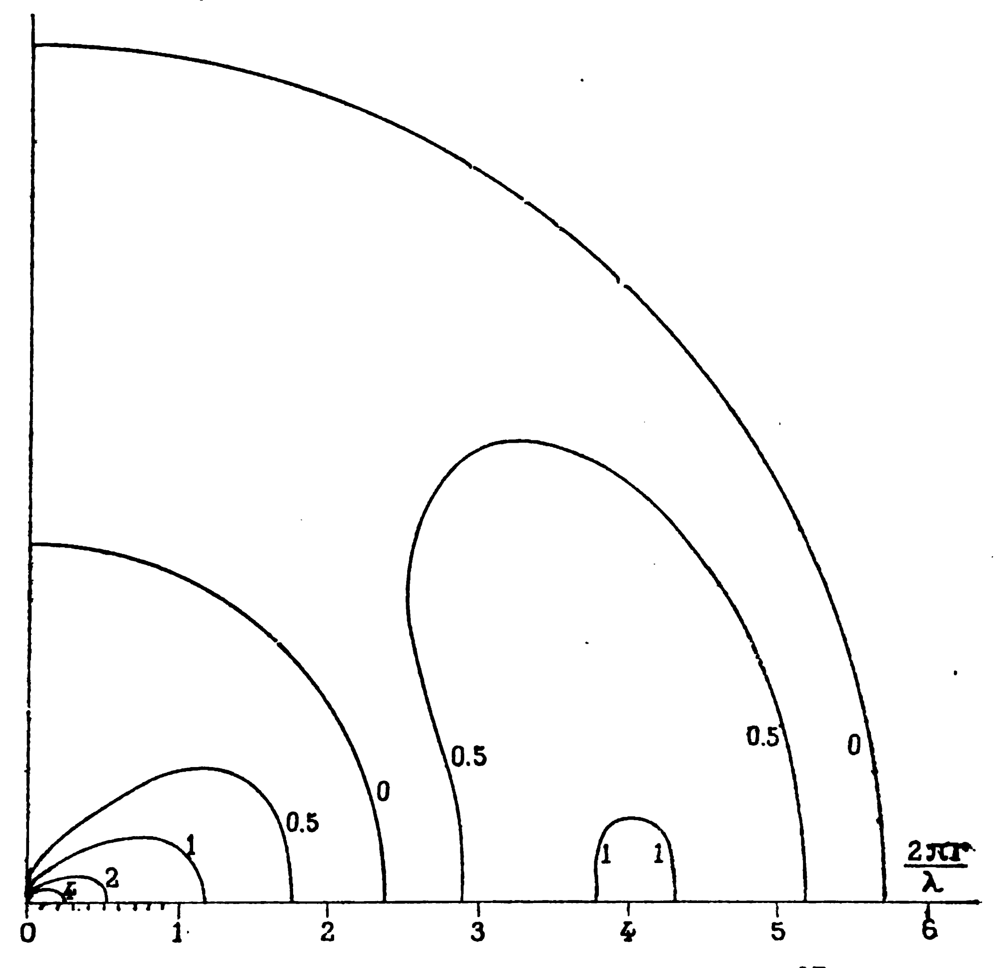


Fig. 7. — Lignes de force d'un élément de courant périodique. Temps $\frac{3T}{16}$

l'origine au temps $t = 0$, s'épanouit, devient de plus en plus grande, puis décroît, se concentre de nouveau vers l'origine où elle s'évanouit au bout d'une demi-période.

2° $\frac{2}{\sqrt{3}} > R > 1$. (Exemple $R = 1{,}05$). La ligne de force part de l'origine au temps $t = 0$, s'épanouit, devient piriforme, un point d'in-

flexion apparaissant au temps $t = 2{,}37 \frac{T}{2\pi}$; elle détache ensuite une boucle ; la portion primitive rétrograde, tandis que la boucle détachée

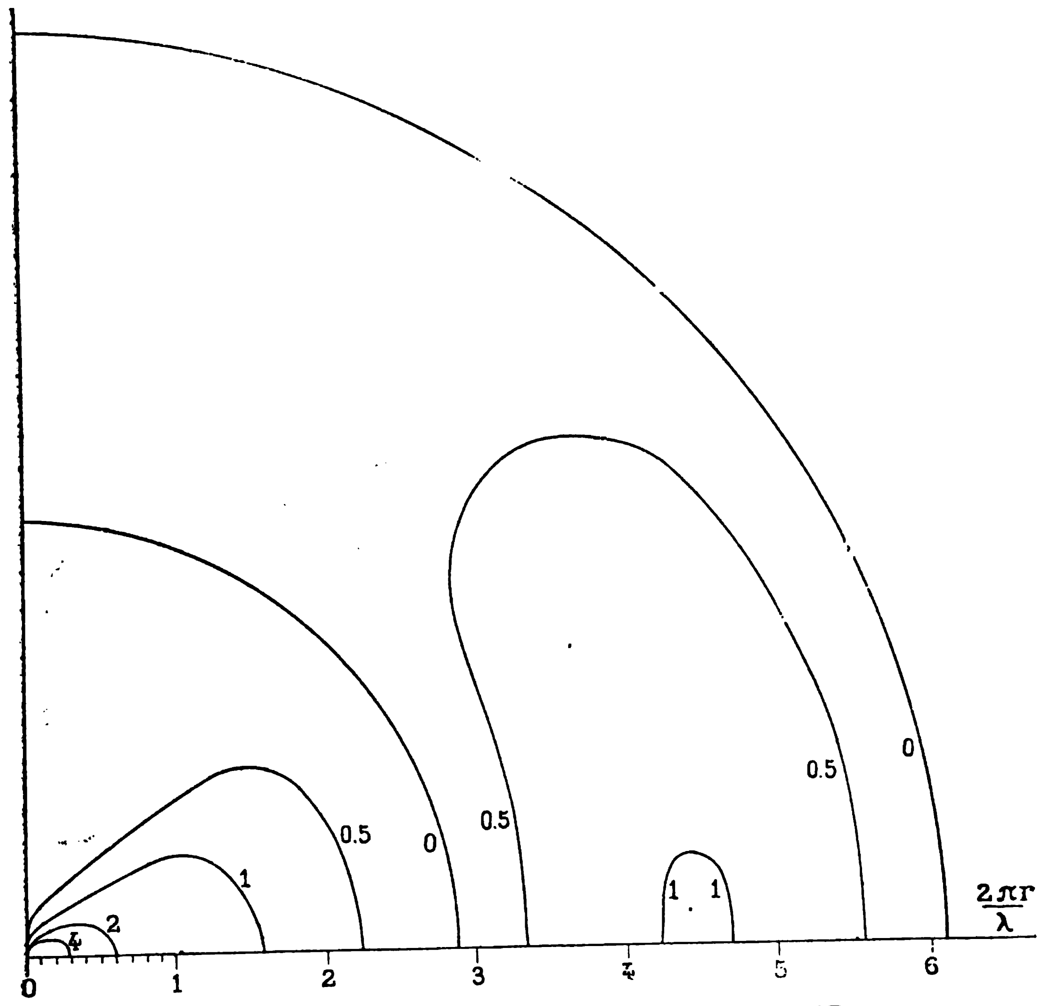


Fig. 8. — Lignes de force d'un élément de courant périodique. Temps $\frac{4T}{16}$

s'éloigne de la source en diminuant de dimensions et s'évanouit au bout d'un certain temps.

3° $1 > R > 0$. La ligne de force. (Par exemple $R = 0{,}5$) part de l'origine au temps $t = 0$, s'épanouit, devient piriforme, un point d'inflexion apparaissant à l'époque $t = 2{,}37 \frac{T}{4}$; elle détache ensuite une

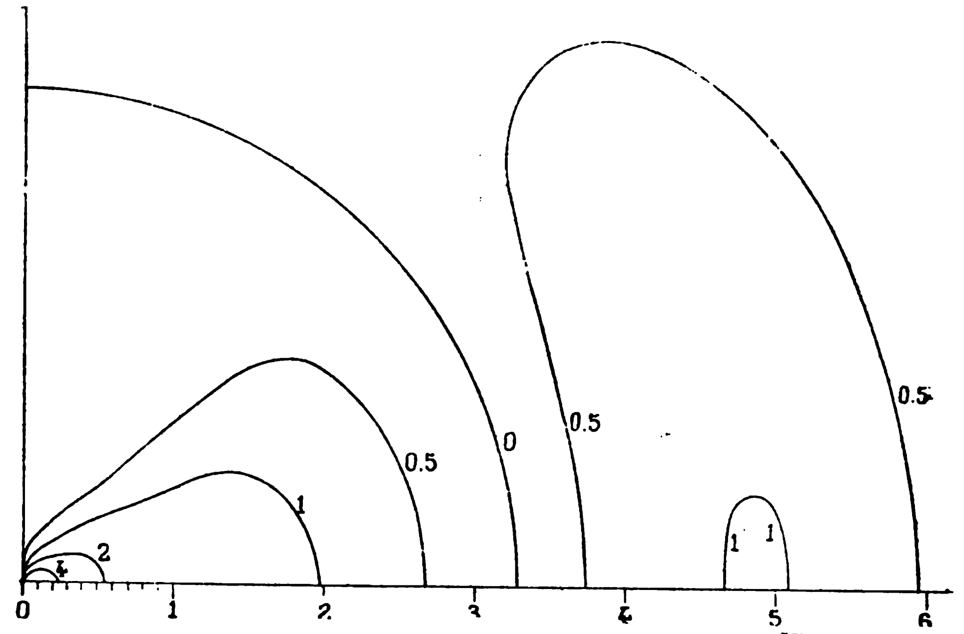


Fig. 9. — Lignes de force d'un élément de courant périodique. Temps $\frac{5T}{16}$

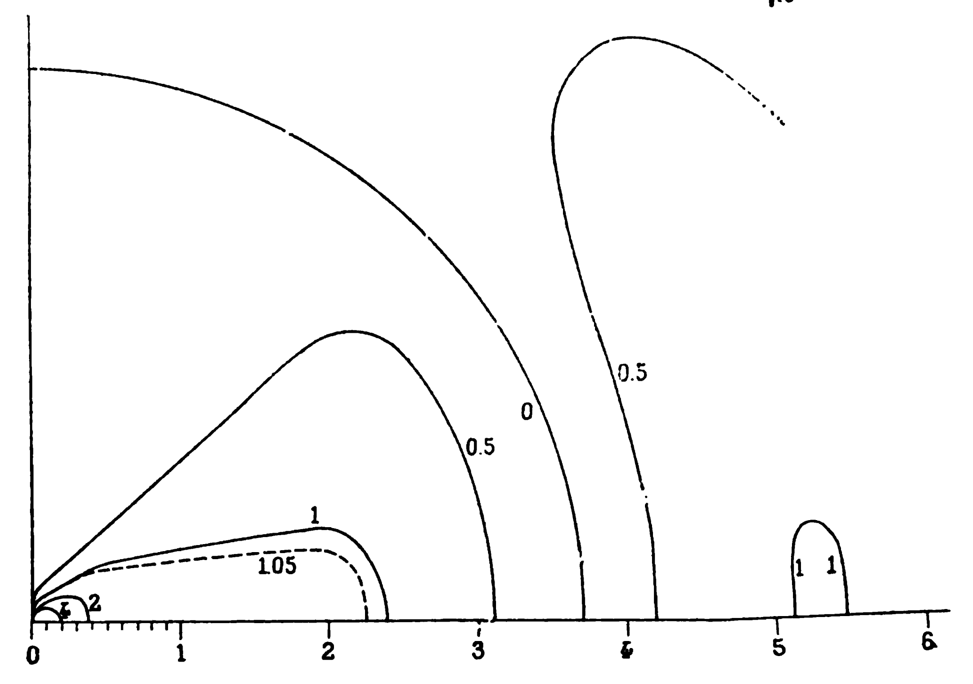


Fig. 10. — Lignes de force d'un élement de courant périodique. Temps $\frac{6T}{16}$

boucle en se divisant en deux branches ; l'une qui rétrograde vers l'origine, tandis que la boucle s'éloigne de la source et va jusqu'à l'infini quand le temps augmente indéfiniment.

23. A grande distance, les lignes de force ont la forme de boucles et sont approximativement circulaires sur presque toutes leur longueur (fig. 13). La ligne de force R est approximativement tangente au rayon vecteur qui fait avec l'axe des x l'angle donné par

$$\cos \varphi = \sqrt{R}.$$

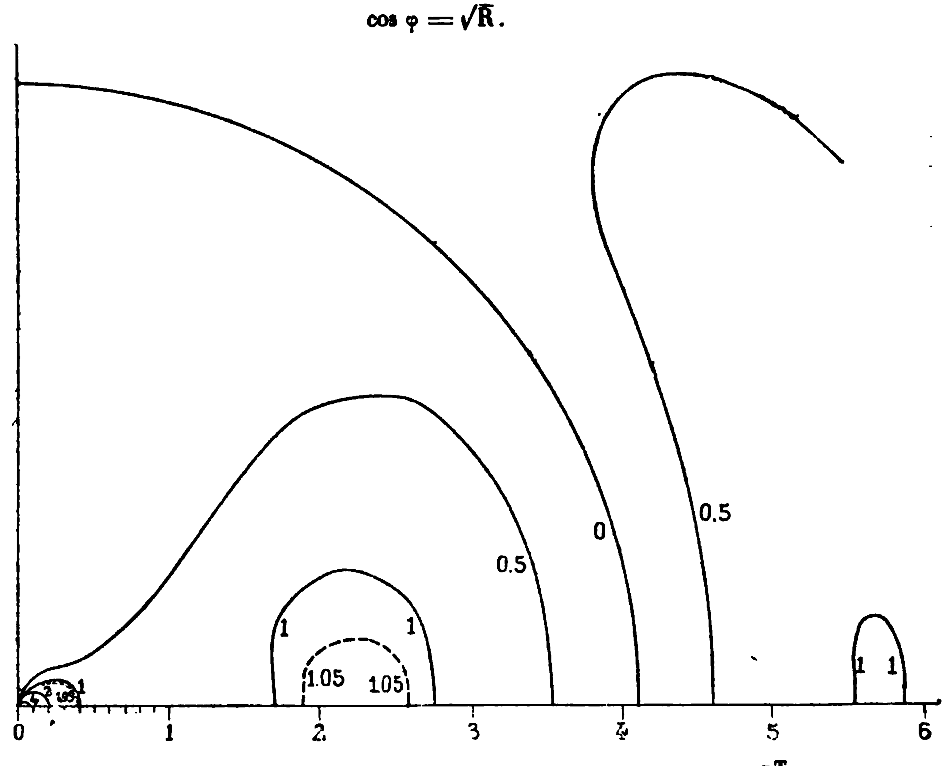


Fig. 11. — Lignes de force d'un élément de courant périodique. Temps $\frac{7T}{16}$

Les lignes de force se propagent, à grande distance, avec une vitesse constante, V, égale à la vitesse de la lumière dans le milieu. La même ligne de force occupe, à deux instants consécutifs situés à l'intervalle d'une période T de l'oscillation deux positions à une distance

$$\lambda = VT.$$

C'est la longueur que nous avons appelée longueur d'onde de l'oscillation, et l'on voit ici la raison de cette dénomination.

III. — Champ électromagnétique d'un élément de courant périodique amorti

24. On a, dans le cas d'un élément de courant périodique amorti

$$f = \mathrm{F}\, e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi\right]. \qquad (33)$$

Fig. 12. — Lignes de force d'un élément de courant périodique. Temps $\frac{T}{5}$

Dans cette expression

δ représente le décrément logarithmique de l'oscillation, ou logarithme du rapport de deux maxima successifs de même sens.

λ représente la longueur d'onde de l'oscillation.

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le diélectrique.

On a, dans l'oscillateur, d'après la relation (10)

$$Q = \frac{\varepsilon}{2l} f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$$

$$Q = \frac{\varepsilon}{2l} F e^{-\frac{\delta}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi\right). \qquad (34)$$

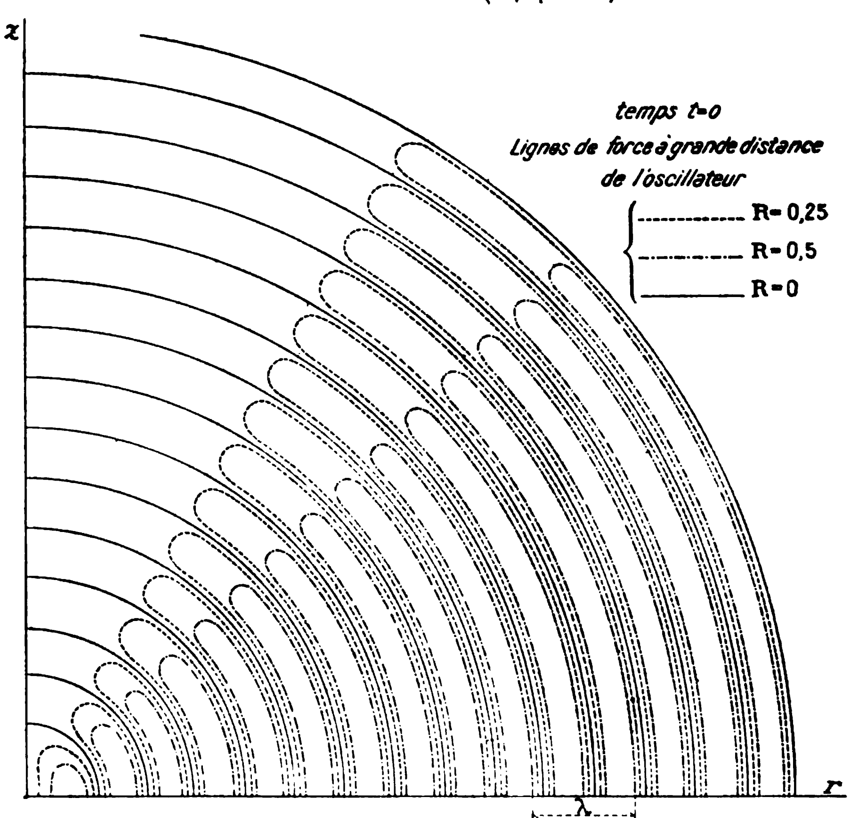


Fig. 13.

Courant dans l'oscillateur. — 25. L'intensité du courant dans l'oscillateur est donnée par

$$\mathfrak{I} = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2l} F e^{-\frac{\delta}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}\left[\frac{\delta}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}\cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi\right) + \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}\sin\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi\right)\right]$$

$$\mathfrak{I} = -I e^{-\frac{\delta}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi + \chi\right) \qquad (35)$$

E I. — L

en posant

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{2l} F \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\cos\chi} \qquad (36)$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\delta}{2\pi}. \qquad (37)$$

Une oscillation du type (35) s'amortit avec le temps, et devient très petite. Supposons qu'elle soit reproduite à des intervalles réguliers d'une durée τ, intervalles assez grands pour qu'on puisse supposer l'oscillation amortie au moment où la suivante se trouve excitée.

Le carré du courant efficace a alors pour expression :

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathfrak{J}^2 dt. \qquad (38)$$

Mais, l'oscillation étant complètement amortie à la fin de chaque intervalle,

$$\int_0^\tau \mathfrak{J}^2 dt = \int_0^\infty \mathfrak{J}^2 dt$$

de sorte que

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty \mathfrak{J}^2 dt$$

$$= \frac{1}{\tau} I^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{\delta t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi + \chi\right)$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{\tau} I^2 \left[\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{2\delta}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, e^{-2\frac{\delta t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}} \cos 2\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi + \chi\right)\right]$$

Dans le cas particulier, le plus important pour la pratique, où l'amortissement est assez petit pour qu'on puisse supposer.

δ^2 négligeable devant $4\pi^2$

la deuxième intégrale est nulle, le terme à intégrer étant sinusoïdal, à des quantités négligeables près, et l'on peut écrire :

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{\tau} \frac{I^2}{2} \int_0^\infty e^{-2\cdot\frac{\delta}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} dt$$

$$I_{eff}^2 = -\frac{1}{\tau} \frac{I^2}{2} \frac{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\delta} \left| e^{-2\frac{\delta}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \right|_0^\infty$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{\tau} \frac{I^2}{4\delta} \lambda\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$I_{eff}^2 = N \frac{I^2}{4\delta} \lambda\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad (39)$$

en posant

$$N = \frac{1}{\tau} \tag{40}$$

N est le nombre de trains d'oscillations amorties par unité de temps.

On a d'ailleurs, en supposant δ^2 négligeable par rapport à $4\pi^2$

$\cos \chi = 1$, à des termes négligeables près,

et, par conséquent

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{2l} F \cdot \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{41}$$

Distribution du champ électromagnétique à grande distance de l'oscillateur.— *26*. A grande distance de l'oscillateur, nous avons, d'après les expressions (14) et (15)

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{f''\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)}{r} \cos\varphi \\ \mathcal{H} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{f''\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)}{r} \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

les dérivées étant prises par rapport à $\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$.

Mais

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = \frac{2l}{\varepsilon} Q \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

d'où

$$f' = \frac{df}{dt} \cdot \sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$f'' = \frac{df}{dt} \varepsilon\mu = 2 l\mu \frac{d^2Q\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)}{dt^2} \tag{43}$$

Mais on a, d'après (35)

$$\frac{d}{dt} Q \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = -I e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi + \chi\right]$$

d'où

$$\frac{d^2}{dt^2} Q \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot I \frac{1}{\cos\chi} e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi + 2\chi\right] \tag{44}$$

ou, d'après (43)

$$f' = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{2l}{\lambda} \cdot 2\pi \cdot I \cdot \frac{1}{\cos\chi} \qquad (45)$$

et, d'après l'expression (42)

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E} &= -2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{2l}{\lambda}\frac{1}{r}I \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\chi} e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)+\psi+2\chi\right] \\ \mathcal{M} &= -2\pi\frac{2l}{\lambda}\frac{1}{r} I \frac{\cos\varphi}{\cos\chi} e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)+\psi+2\chi\right] \end{aligned}\right\} (46)$$

Champ électromagnétique à petite distance. Mécanisme de la propagation

a) **Étude de K. Pearson et miss Alice Lee** (²). — *27*. Dans le but de se rapprocher de l'excitateur de Hertz, qui produit des oscillations amorties, le professeur Karl Pearson et miss Alice Lee ont étudié le cas où la fonction f est de la forme

$$f = E\, e^{-\delta\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right).$$

On a, dans le voisinage de l'oscillateur

$$f = E\, e^{-\delta\frac{t}{T}} \sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Les auteurs supposent donc le moment électrique de l'oscillateur nul au temps $t = 0$; mais le courant n'est pas nul. L'oscillateur reçoit à l'origine du temps une impulsion brusque.

Equation et tracé des lignes de force. — *28*. L'équation des lignes de force électrique

$$Q = \rho\frac{d\Pi}{\partial\rho}$$

devient, en remplaçant f par sa valeur, tous calculs faits,

$$Q = E\cos^2\varphi\, e^{-\delta\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)}\left\{\left(\frac{\delta}{\lambda}-\frac{1}{r}\right)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)-\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)\right\}.$$

Les figures 14 à 69 et planche II, empruntées au mémoire de Pearson et Lee, représentent pour un décrément d'amortissement égal à 0,4, les lignes de forces correspondant aux valeurs suivantes de $R = \frac{Q\lambda}{2\pi E}$.

50 30 10 1 —1 —10 —30 —50.

Elément de courant amorti

Première période

(Extrait des *Philosophical Transactions*

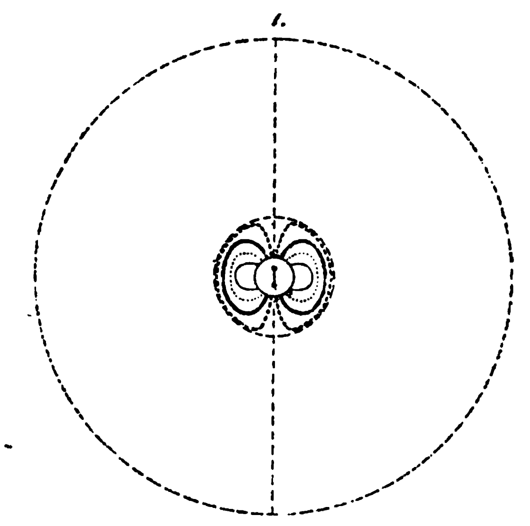


Fig. 14. — Temps : $\frac{T}{8}$

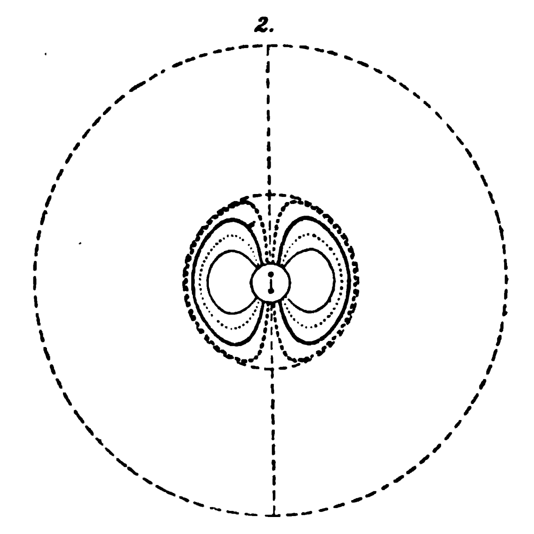


Fig. 15. — Temps : $\frac{2T}{8}$

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Première période

of the Royal Society of London).

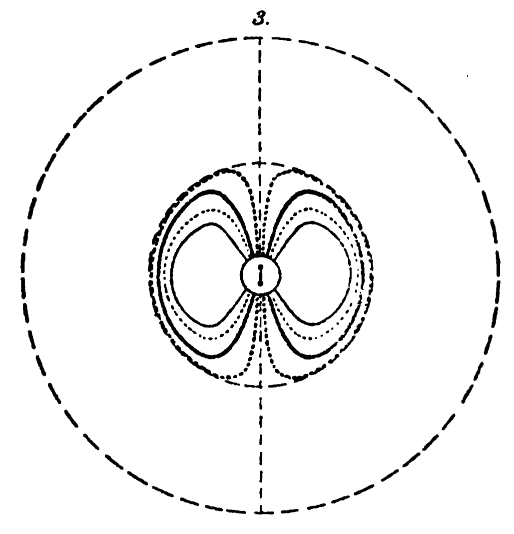


Fig. 16. — Temps ; $\frac{3T}{8}$

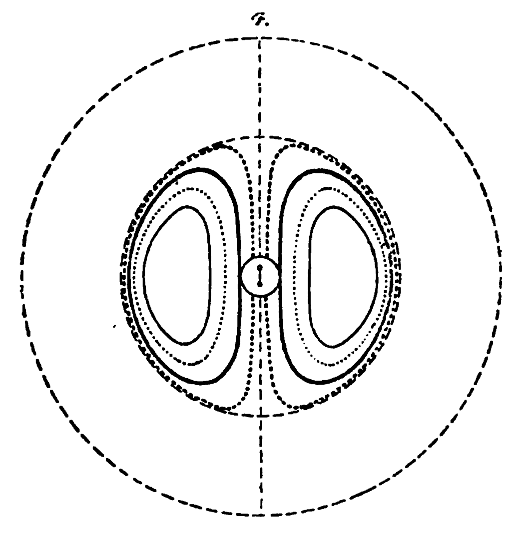


Fig. 17. — Temps : $\frac{4T}{8}$

Elément de courant amorti

Première période

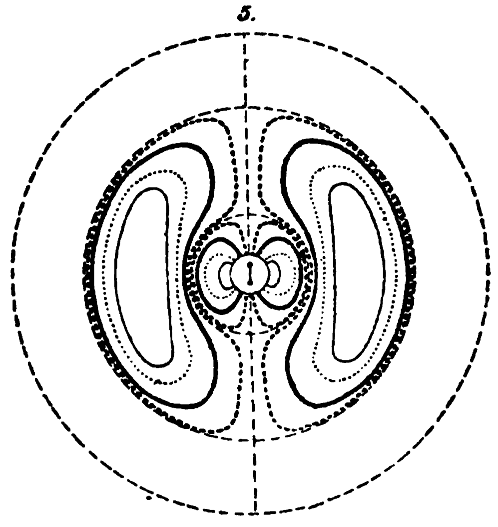


Fig. 18 — Temps : $\frac{5T}{8}$

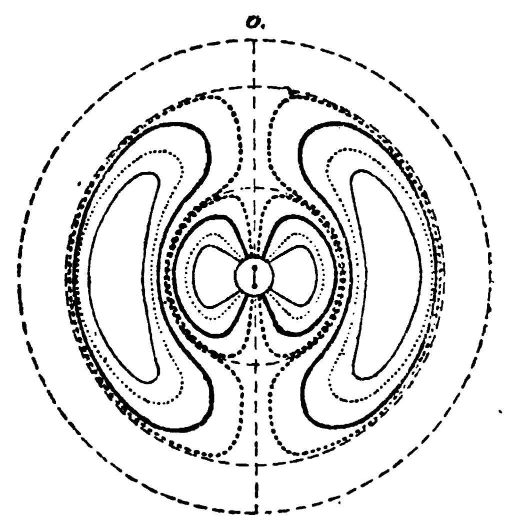


Fig. 19. — Temps : $\frac{6T}{8}$

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Première période

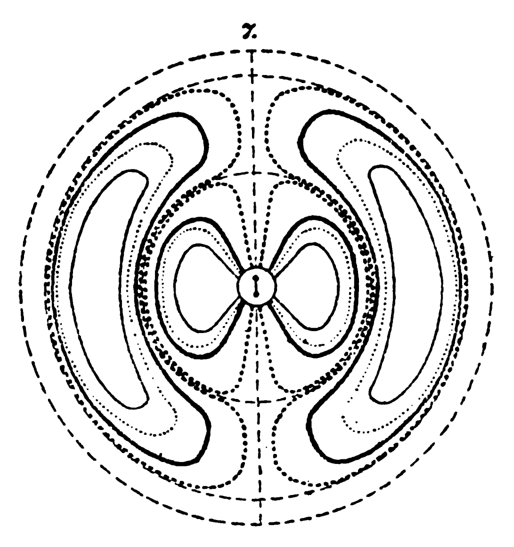


Fig. 20. — Temps : $\frac{7T}{8}$

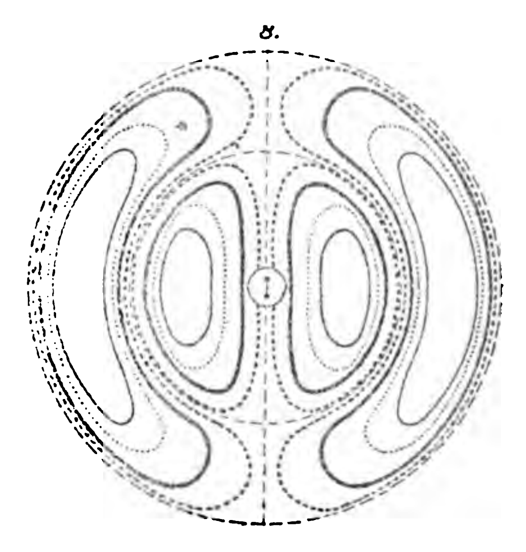


Fig. 21. — Temps : T

Elément de courant amorti

Deuxième période

9.

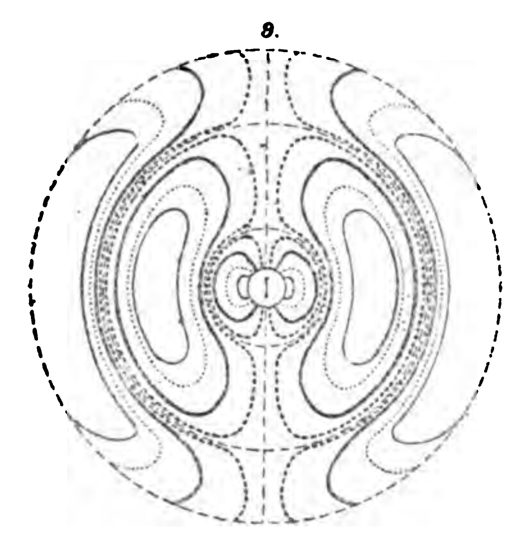


Fig. 22. — Temps : $\left(1 + \frac{1}{8}\right)$ T

10.

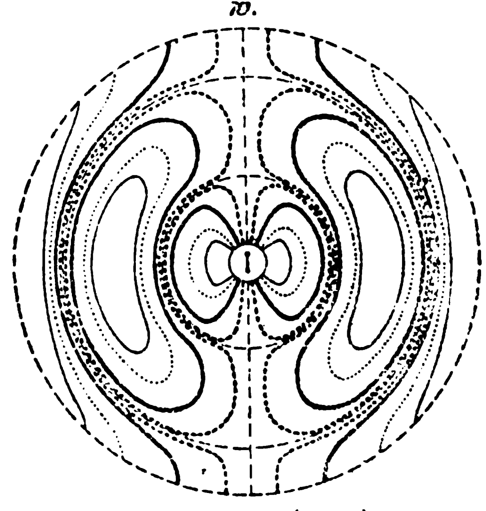


Fig. 23. — Temps : $\left(1 + \frac{1}{4}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Deuxième période

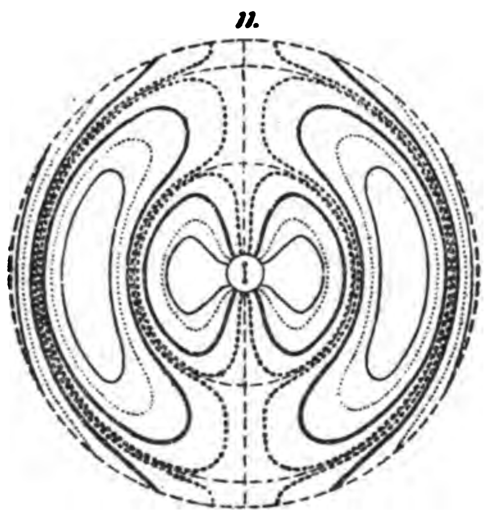


Fig. 24. — Temps : $\left(1 + \frac{3}{8}\right)$ T

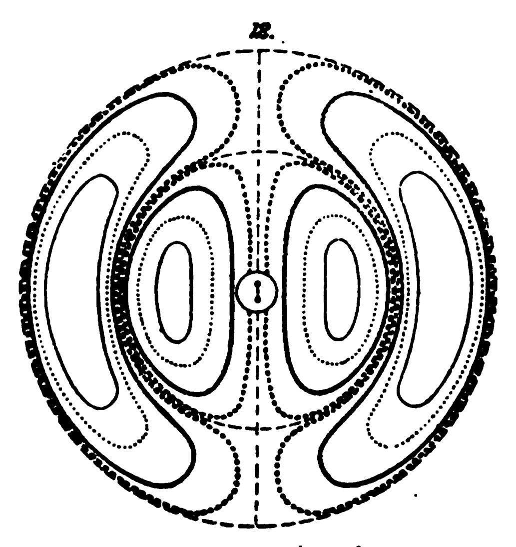


Fig. 25. — Temps : $\left(1 + \frac{4}{8}\right)$ T

Elément de courant amorti

Deuxième période

13.

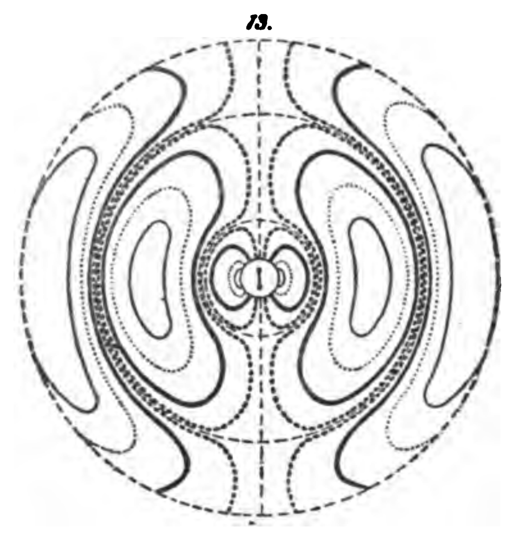


Fig. 26. — Temps : $\left(1 + \frac{5}{8}\right)$ T

14.

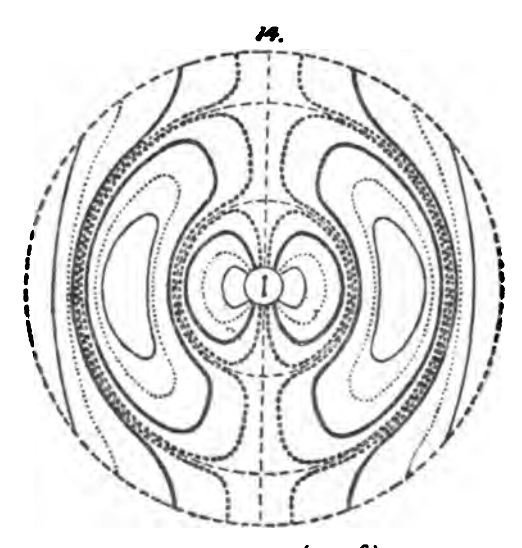


Fig. 27. — Temps : $\left(1 + \frac{6}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Deuxième période

15.

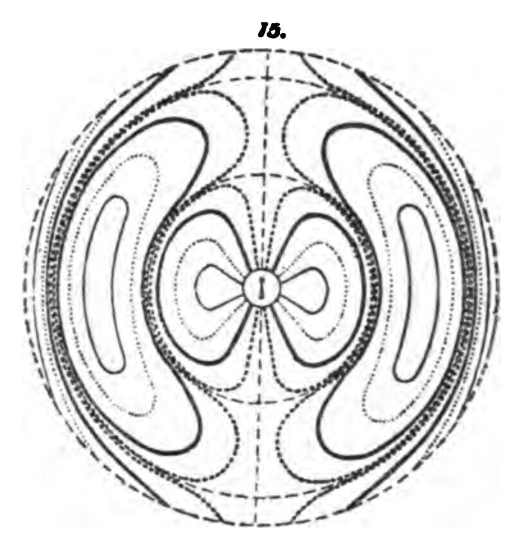


Fig. 28. — Temps : $\left(1 + \frac{7}{8}\right)$ T

16.

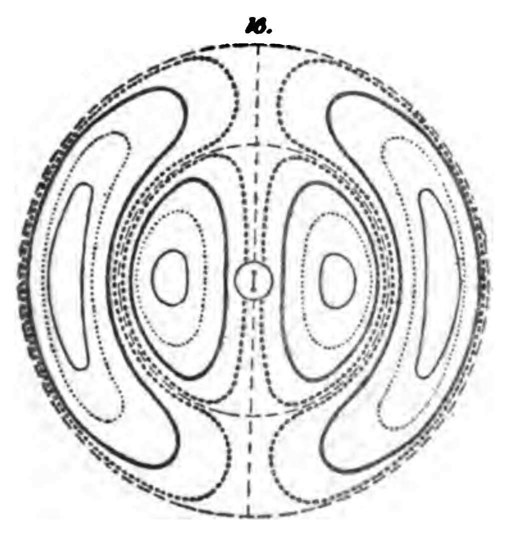


Fig. 29. — Temps : 2 T

Elément de courant amorti

Troisième période

17.

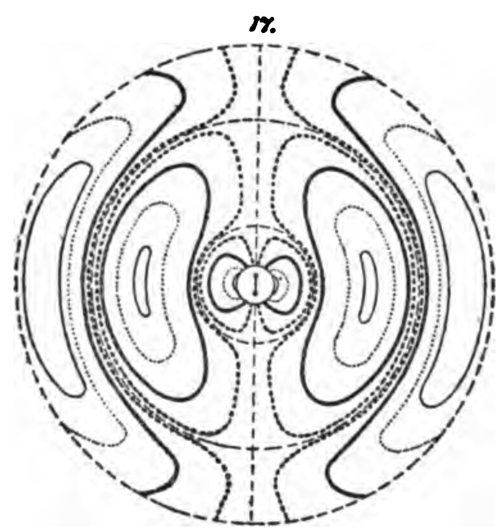


Fig. 30. — Temps : $\left(2 + \frac{1}{8}\right)$ T

18.

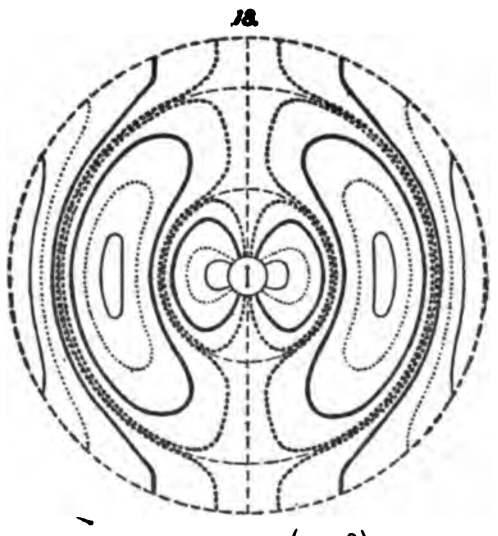


Fig. 31. — Temps : $\left(2 + \frac{2}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Troisième période

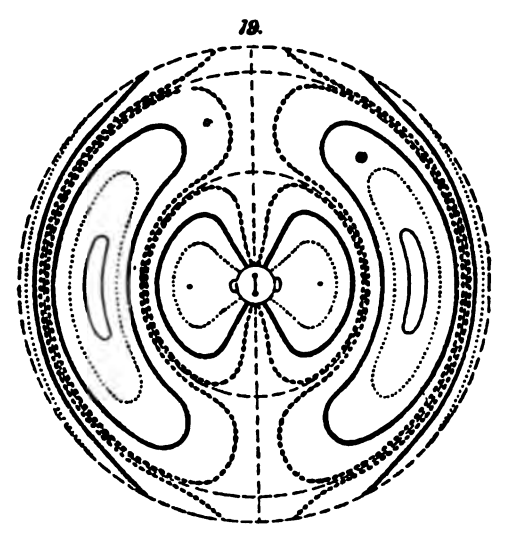


Fig. 32. — Temps : $\left(2 + \frac{3}{8}\right)$ T

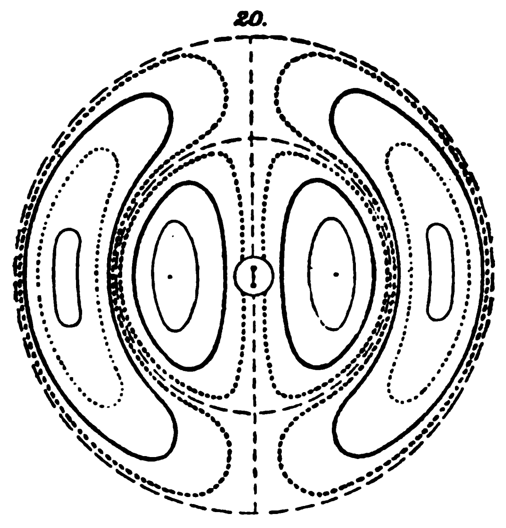


Fig. 33. — Temps : $\left(2 + \frac{4}{8}\right)$ T

Elément de courant amorti

Troisième période

21.

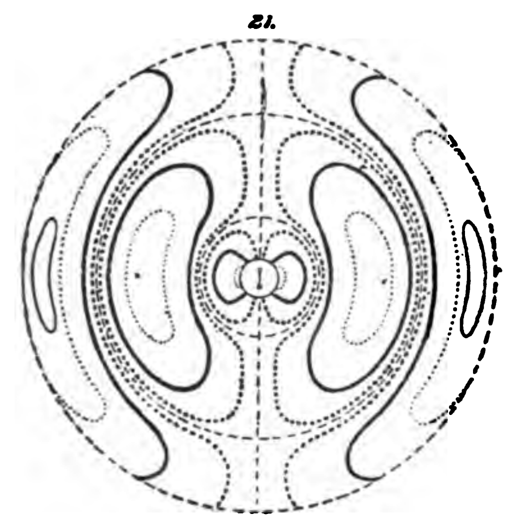


Fig 34. — Temps : $\left(2 + \frac{5}{8}\right)$ T

22.

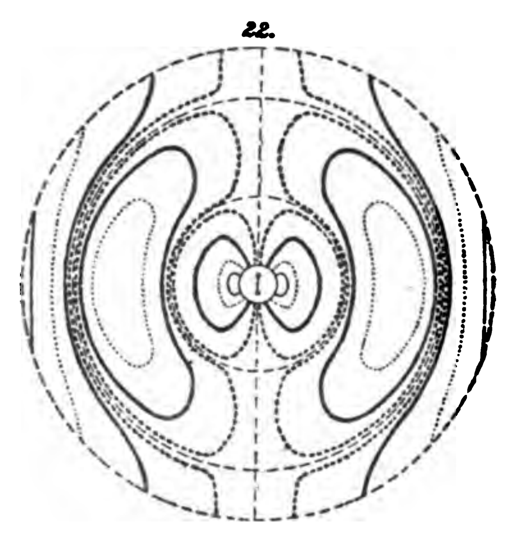


Fig. 35. — Temps : $\left(2 + \frac{6}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Troisième période

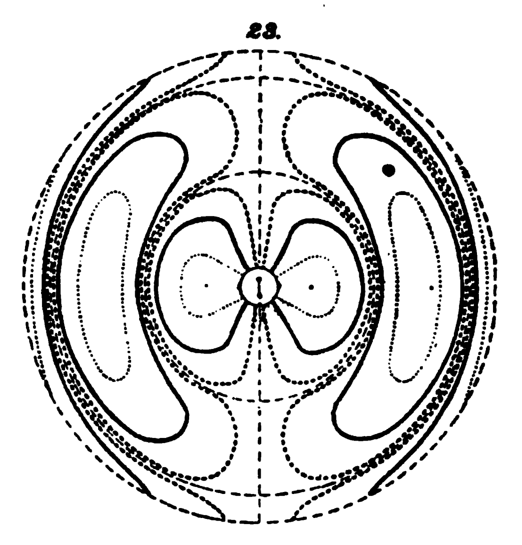


Fig. 36. — Temps : $\left(2 + \frac{7}{8}\right)$ T

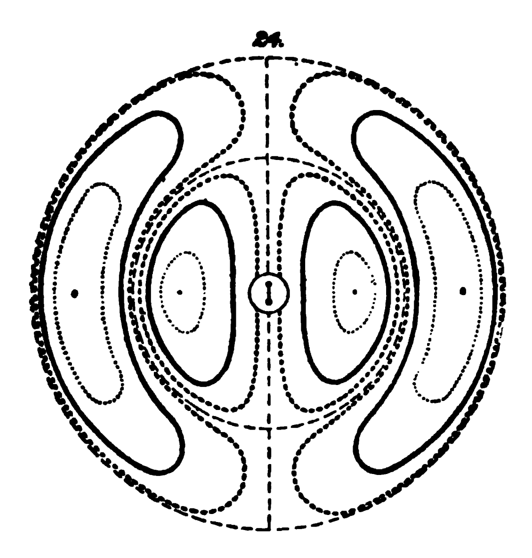


Fig. 37. — Temps : 3 T

Elément de courant amorti

Quatrième période

25.

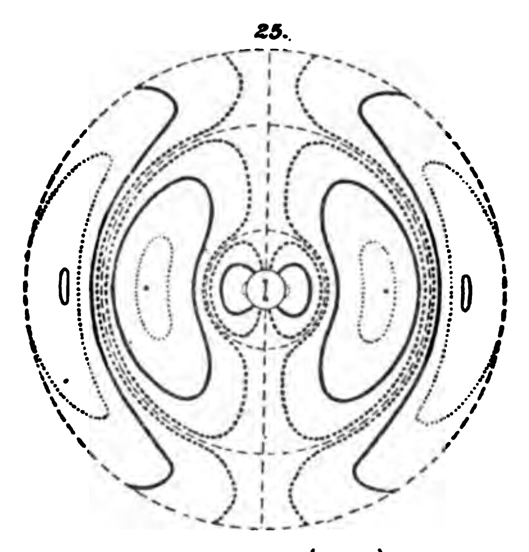


Fig. 38. — Temps : $\left(3 + \frac{1}{8}\right)$ T

26.

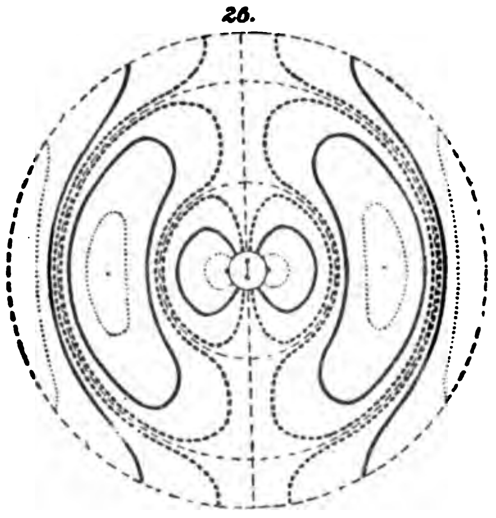


Fig. 39. — Temps : $\left(3 + \frac{2}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Quatrième période

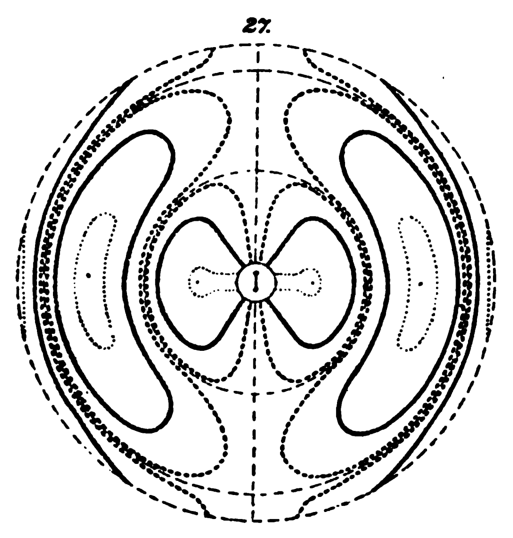


Fig. 40. — Temps : $\left(3 + \frac{3}{8}\right)$ T

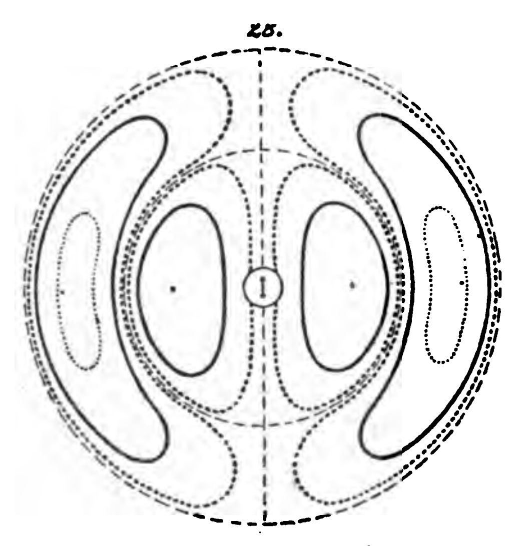


Fig. 41. — Temps : $\left(3 + \frac{4}{8}\right)$ T

Elément de courant amorti

Quatrième période

29.

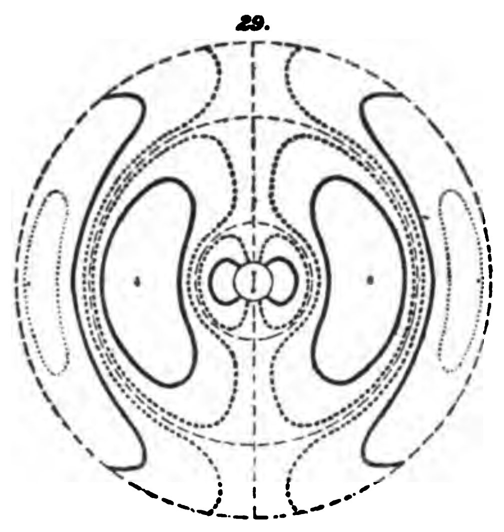


Fig. 42. — Temps : $\left(3 + \frac{5}{8}\right)$ T

30.

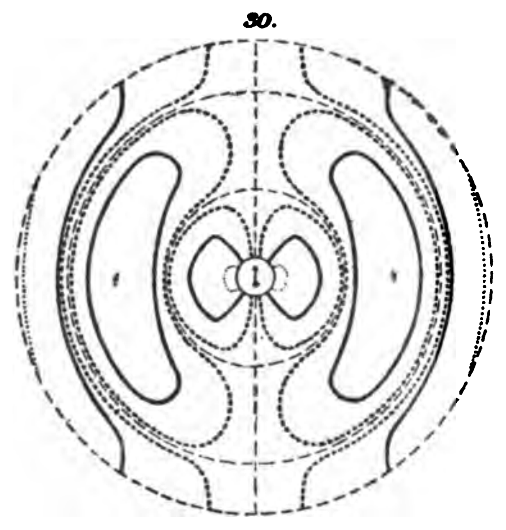


Fig. 43. — Temps : $\left(3 + \frac{6}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Quatrième période

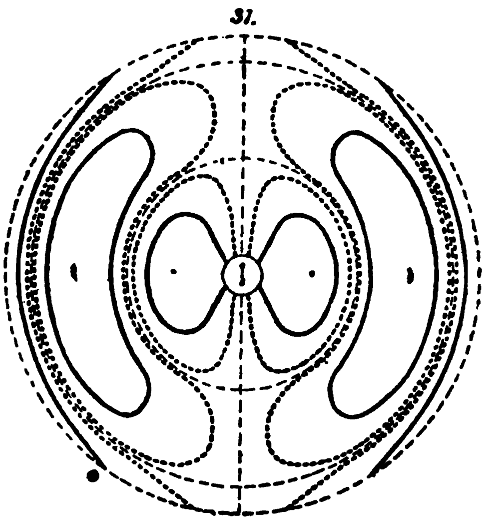


Fig. 44. — Temps : $\left(3 + \frac{7}{8}\right)$ T

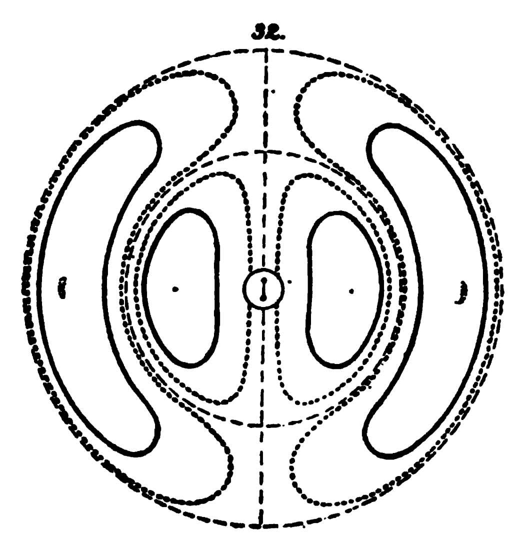


Fig. 45 — Temps : 4 T

Elément de courant amorti

Cinquième période

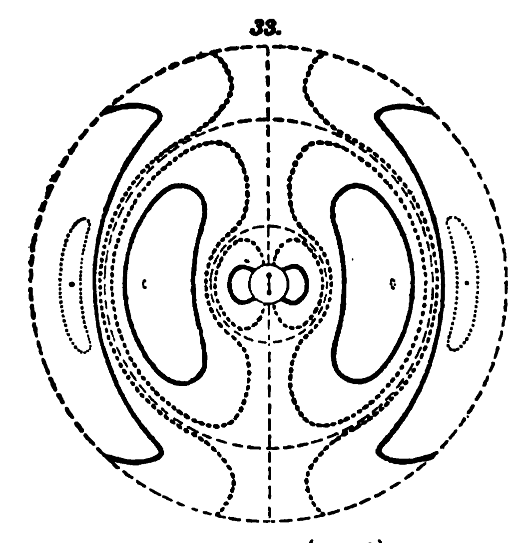


Fig. 46. — Temps : $\left(4 + \frac{1}{8}\right)$ T

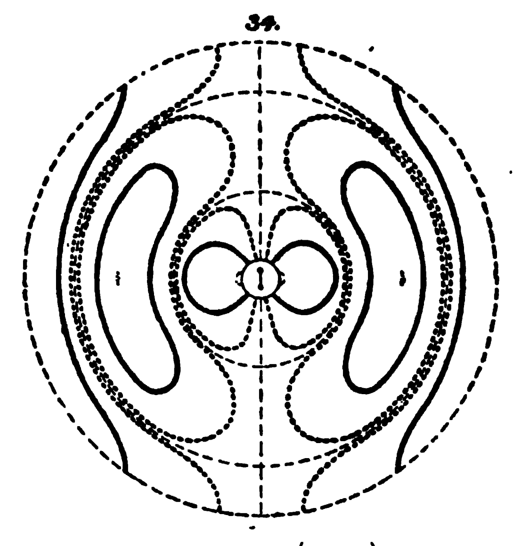


Fig. 47. — Temps : $\left(4 + \frac{2}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Cinquième période

35.

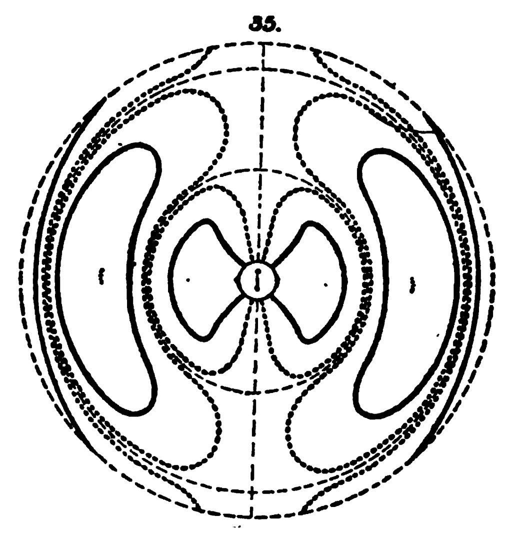


Fig. 48. — Temps : $\left(4 + \frac{3}{8}\right)$ T

36.

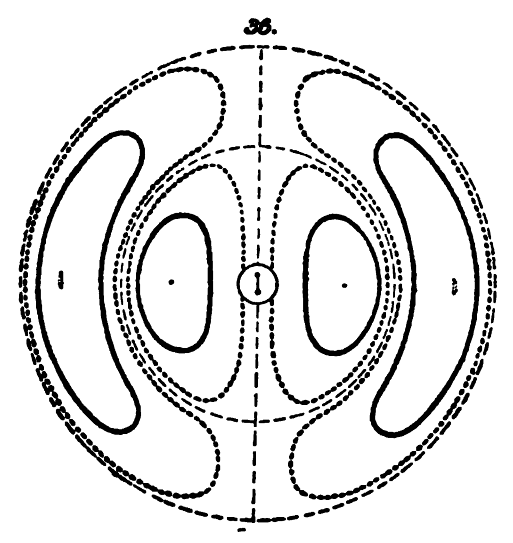


Fig. 49. — Temps : $\left(4 + \frac{4}{8}\right)$ T

Elément de courant amorti

Cinquième période

37.

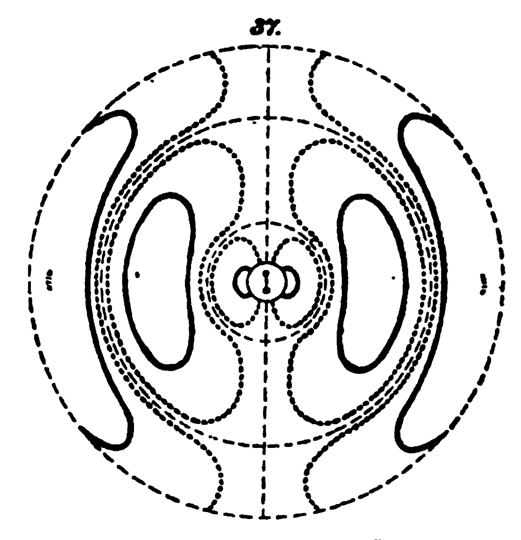


Fig. 50. — Temps : $\left(4 + \frac{5}{8}\right)$ T

38.

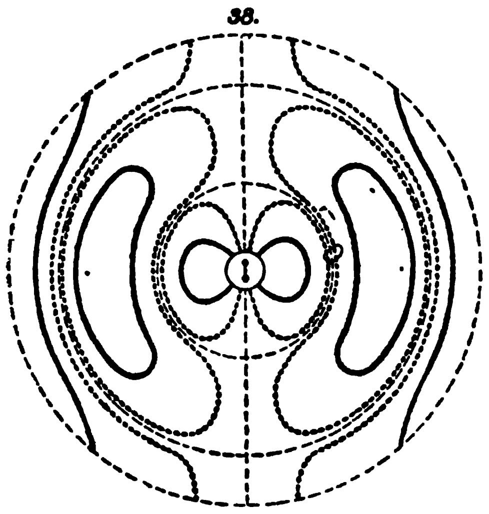


Fig. 51. — Temps : $\left(4 + \frac{6}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Cinquième période

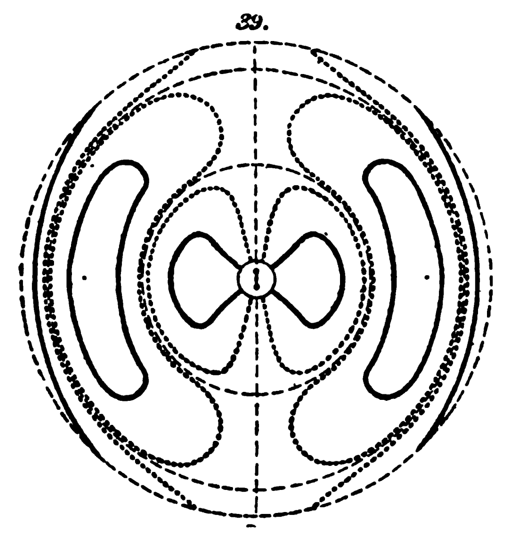


Fig. 52. — Temps : $\left(4 + \frac{7}{8}\right)$ T

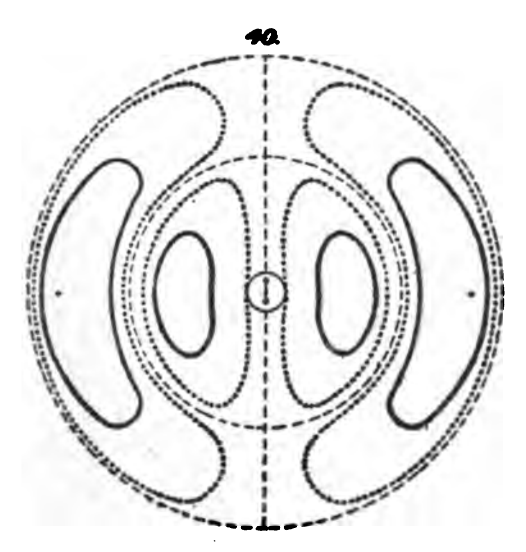


Fig. 53. — Temps : 5 T

Elément de courant amorti

Sixième période

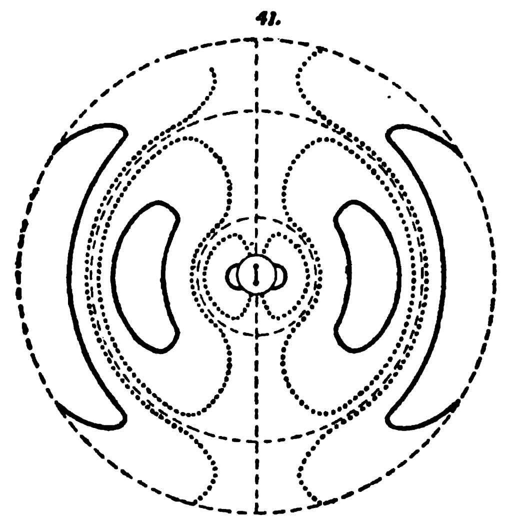


Fig. 54. — Temps : $\left(5 + \frac{1}{8}\right)$ T

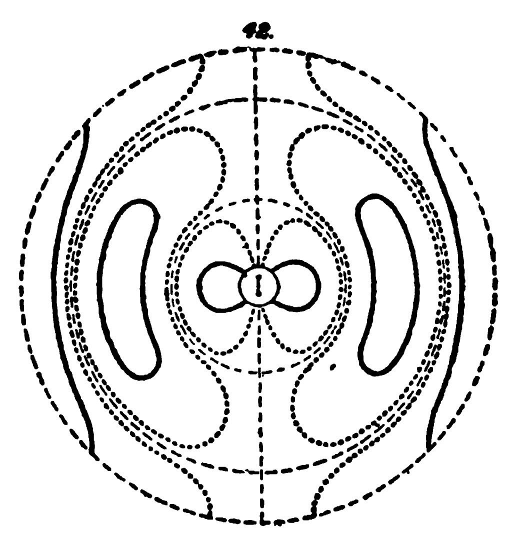


Fig. 55. — Temps : $\left(5 + \frac{2}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Sixième période

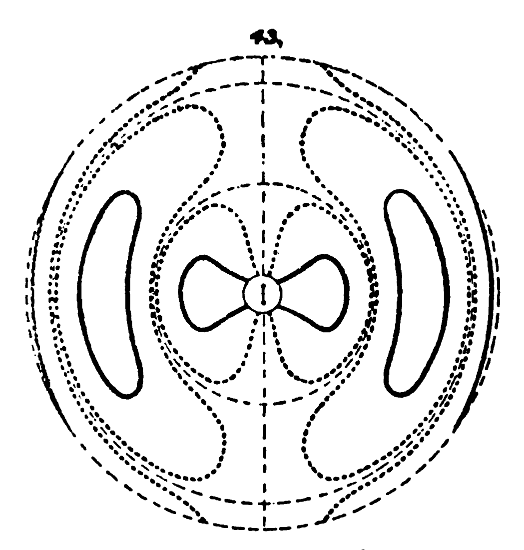


Fig. 56. — Temps : $\left(5 + \frac{3}{8}\right)$ T

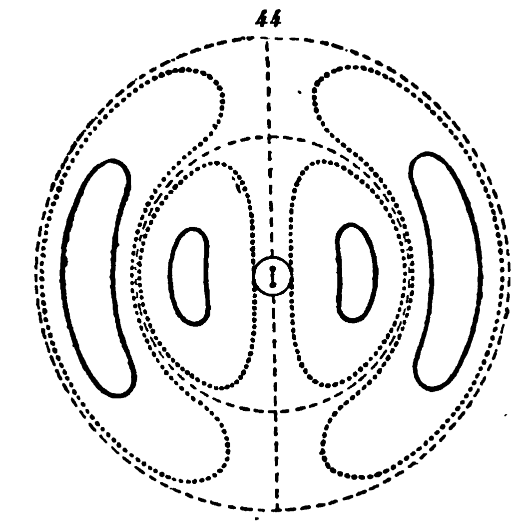


Fig. 57. — Temps : $\left(5 + \frac{4}{8}\right)$ T

Elément de courant amorti

Sixième période

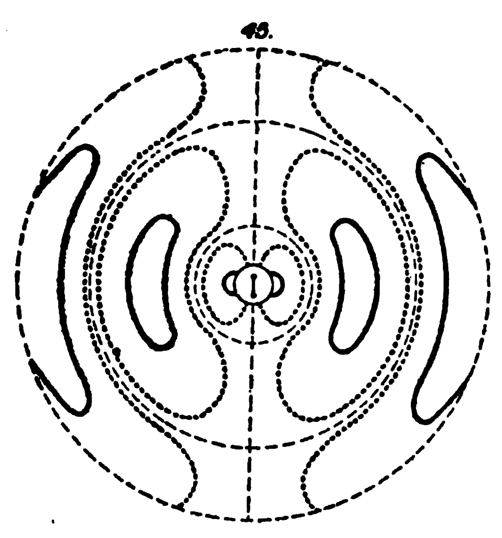


Fig. 58. — Temps : $\left(5 + \frac{5}{8}\right)$ T

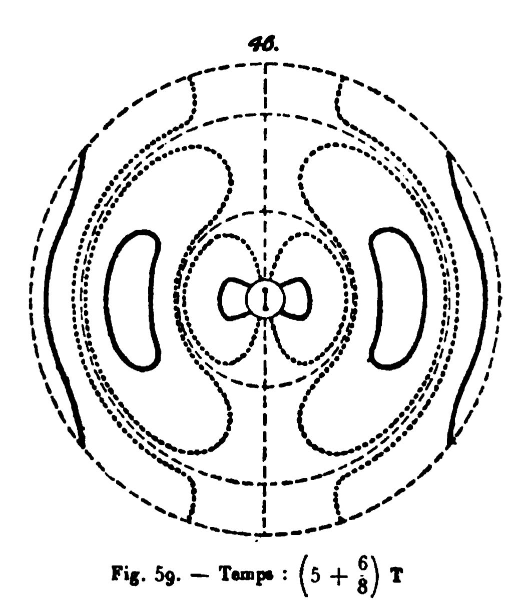


Fig. 59. — Temps : $\left(5 + \frac{6}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Sixième période

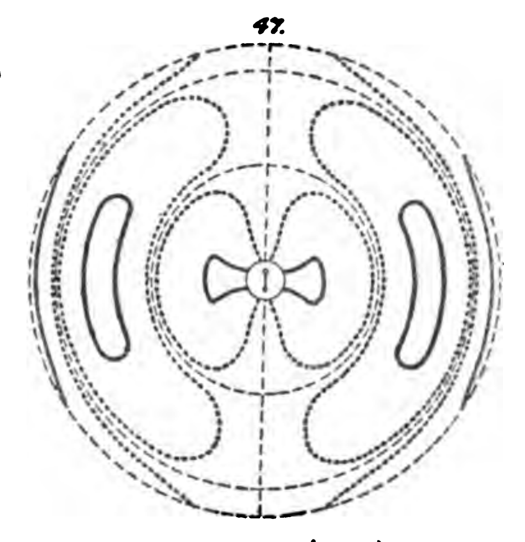


Fig. 60. — Temps : $\left(5 + \frac{7}{8}\right)$ T

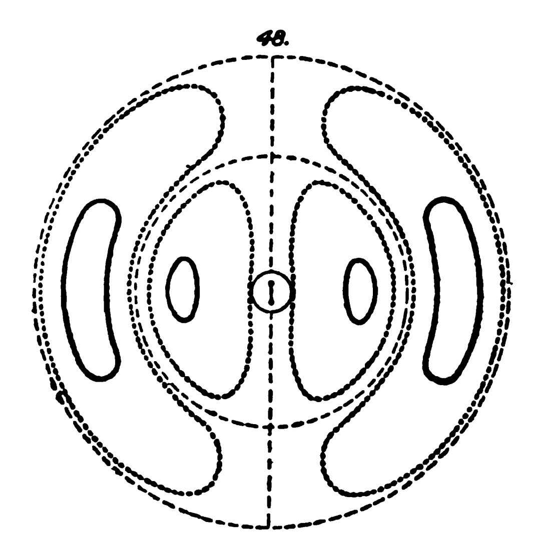


Fig. 61. — Temps : 6 T

Elément de courant amorti

Septième période

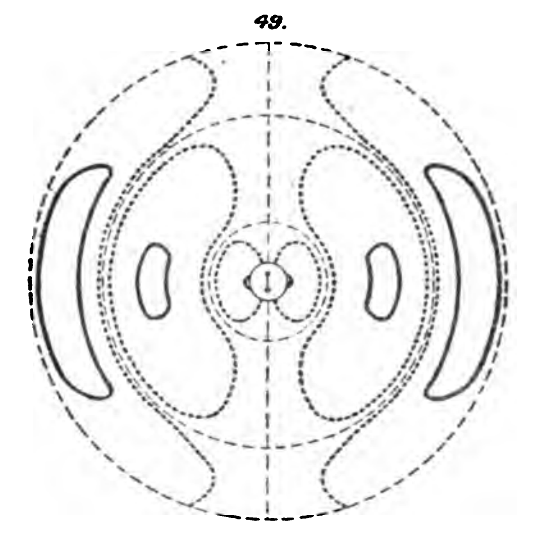


Fig. 62. — Temps : $\left(6 + \frac{1}{8}\right)$ T

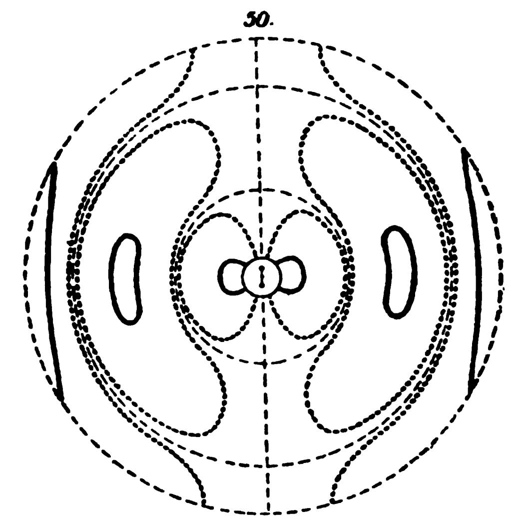


Fig. 63. — Temps : $\left(6 + \frac{2}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Septième période

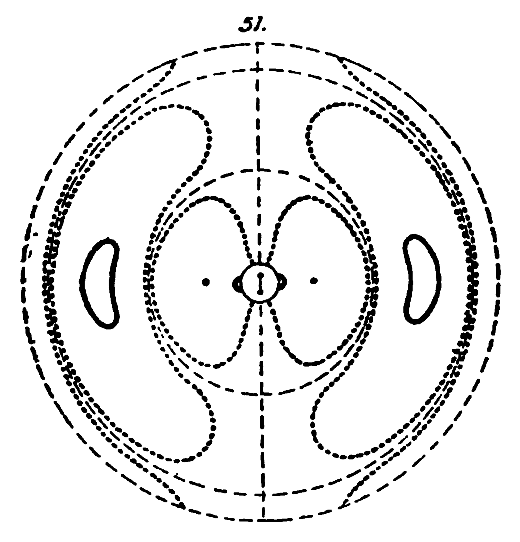


Fig. 64. — Temps : $\left(6 + \frac{3}{8}\right)$ T

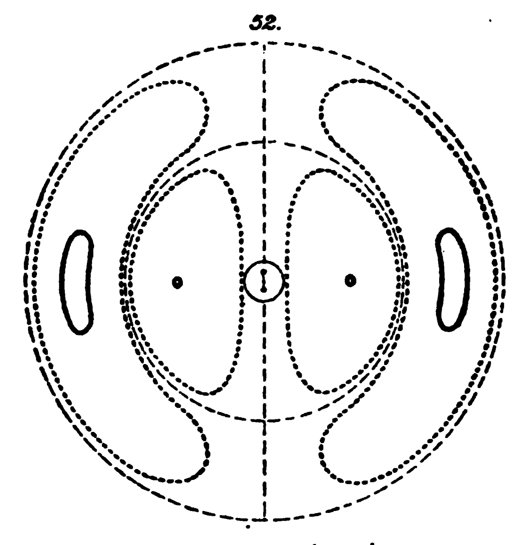


Fig. 65. — Temps : $\left(6 + \frac{4}{8}\right)$ T

Elément de courant amorti

Septième période

53.

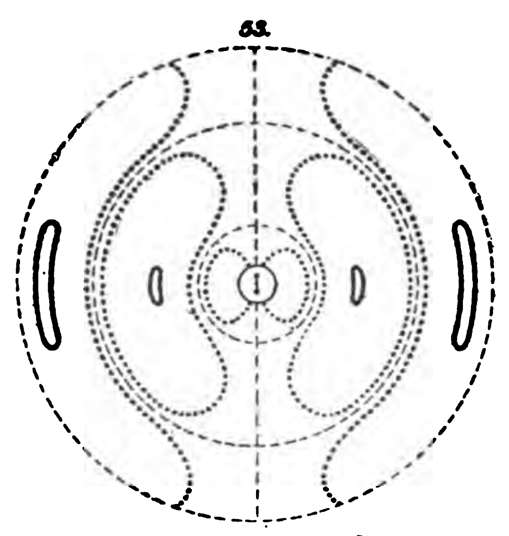


Fig. 66. — Temps : $\left(6 + \frac{5}{8}\right)$ T

54.

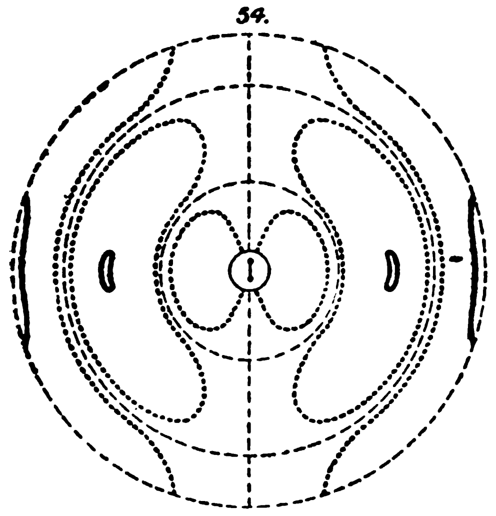


Fig 67. — Temps : $\left(6 + \frac{6}{8}\right)$ T

de K. Pearson et Miss Alice Lee

Septième période

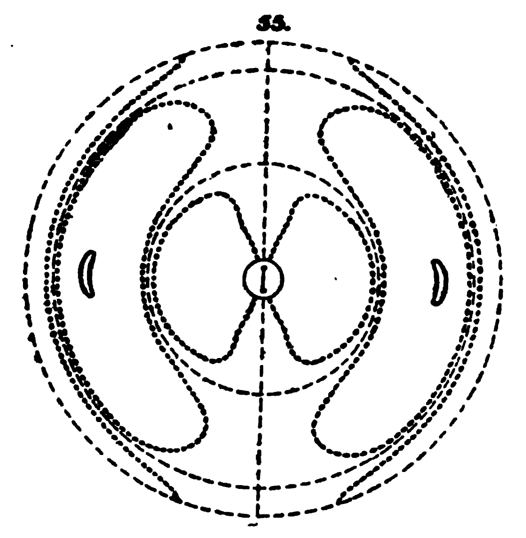


Fig. 68. — Temps : $\left(6 + \frac{7}{8}\right)$ T

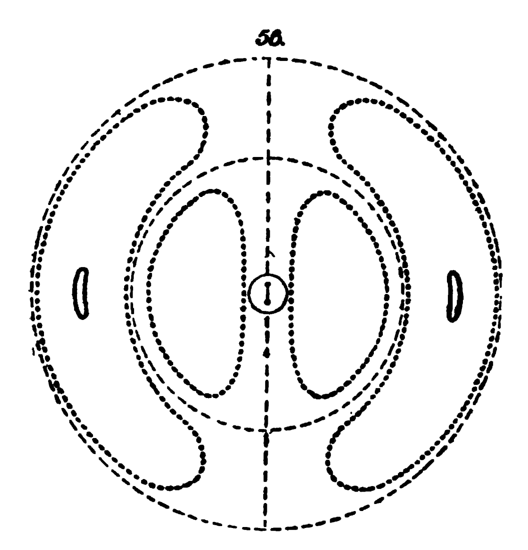


Fig. 69. — Temps : 7 T

Les courbes $\pm$ 50 sont tracées en trait plein fin ; celles qui correspondent à $\pm$ 30 sont en pointillé fin ; celles qui correspondent à $\pm$ 10 sont tracés pleins gros ; celles qui correspondent à $\pm$ 1 sont en pointillé gros.

Elles sont tracées pour des temps échelonnés de $\frac{T}{2}$ entre 0 et 7 périodes complètes, et permettent de suivre aisément le déplacement des lignes de force et leur évanouissement progressif. Ainsi la boucle qui correspond à $Q = 50$ (trait plein fin) n'embrasse plus une surface sensible à partir de la figure 25 et n'est plus représentée que par un point jusqu'à la figure 33; elle disparait ensuite complètement

Dès la figure 29, l'oscillateur n'émet plus de centres d'intensité 50. Les lignes de force d'intensité 30 s'évanouissent dans les figures 30 à 41, celles qui correspondent à 10 disparaissent progressivement dans les figures 53 à 56 et il suffirait de tracer dix diagrammes de plus pour constater que la ligne 1 disparaîtrait également. Cette propagation et cet évanouissement progressifs des lignes de force, sont sensiblement différents de la propagation que nous avons trouvée dans le cas du courant non amorti.

Expression des forces électrique et magnétique.

29. K. Pearson et miss Alice Lee décomposent la force électrique en deux composantes E_a et E_t, la première parallèle à l'oscillateur, la deuxième perpendiculaire au rayon vecteur et située dans le plan méridien. Ils obtiennent les valeurs suivantes :

$$E_t = \Phi_1 \cos\varphi = \cos\varphi \frac{E \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 e^{-\delta\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)}}{\frac{2\pi r}{\lambda}} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+2\chi\right\}}{\cos^2\chi} - \frac{3\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+\chi\right\}}{\frac{2\pi t}{\lambda}\cos\chi} - \frac{3\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)}{\left(\frac{2\pi r}{r}\right)^2}\right]$$

$$E_a = \Phi = \frac{E \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 e^{-\delta\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)}}{\frac{2\pi r}{\lambda}} \left[\frac{2\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+\chi\right\}}{\left(2\pi\frac{r}{\lambda}\right)\cos\chi} + \frac{2\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)}{\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2}\right]$$

et, pour la force magnétique $\mathcal{M}$.

$$\mathcal{M} = \Phi_2 \cos\varphi = \cos\varphi \frac{E \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 e^{-\delta\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)}}{\frac{2\pi r}{\lambda}} \times$$

$$\times \left[\frac{-\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+2\chi\right\}}{\cos^2\chi} + \frac{\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+\chi\right\}}{\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\chi}\right]$$

en posant

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Aux grandes distances, Φ_2, qui est de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$, est infiniment petit par rapport à Φ_1 et Φ_3, qui sont de l'ordre de $\frac{1}{r}$. Φ_1 et Φ_3 s'écrivent alors :

$$\Phi_1 = \frac{E \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 e^{-\delta\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)}}{\frac{2\pi r}{\lambda}} \times \frac{\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + 2\chi\right\}}{\cos^2\chi}$$

$$\Phi^3 = -\frac{E \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 e^{-\delta\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)}}{\frac{2\pi r}{\lambda}} \times \frac{\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + 2\chi\right\}}{\cos^2\chi}.$$

A grande distance, les forces électrique et magnétique sont transverses, elles varient comme le cosinus de la latitude ; elles sont inversement proportionnelles à r ; elles ont même phase.

Front de l'onde. — *30*. Le champ électrique étant supposé nul au temps $t < 0$, le restera au point M, situé à une grande distance r de l'oscillateur, jusqu'au temps

$$t = \frac{r \cdot T}{\lambda} = \frac{r}{\Omega}.$$

A cette époque, il y a, pour les vecteurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$, une discontinuité ; ils prennent tout à coup une valeur finie donnée par

$$-\mathcal{M} = \mathcal{E}_t = \frac{2El \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3}{\frac{2\pi r}{\lambda}} \operatorname{tg}\chi \cos\varphi.$$

Vitesse de propagation de la force électrique axiale et de la force magnétique.

31. La vitesse de propagation $V_0 = \frac{dr}{dt}$ est la même pour la force électrique axiale $\mathcal{E}_a$ et pour la force magnétique $\mathcal{M}$; elle a pour expression

$$\frac{V_0}{\Omega} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r} - \frac{\delta}{2\pi}\right)^2}}.$$

Lorsque δ est infini, cette formule nous donne une vitesse égale à celle de la lumière [1] c'est le cas d'un choc.

Lorsque δ est nul (courant non amorti), la formule correspondante est

$$\frac{V_0}{\Omega} = 1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2$$

dans ce cas, la vitesse de propagation est toujours positive ; elle décroît de l'infini à Ω quand la distance augmente indéfiniment.

Au contraire, la vitesse V_0, dans le cas du courant amorti, présente des singularités remarquables. Infiniment petite et négative pour $t = 0$, elle reste négative (fig. 70) jusqu'à

$$r = \frac{\lambda \sin^2 \chi}{2\pi}$$

et devient de nouveau infinie pour cette valeur. Elle devient alors infinie positive, puis décroît constamment en tendant asymptotiquement vers la vitesse de lumière quand r augmente indéfiniment.

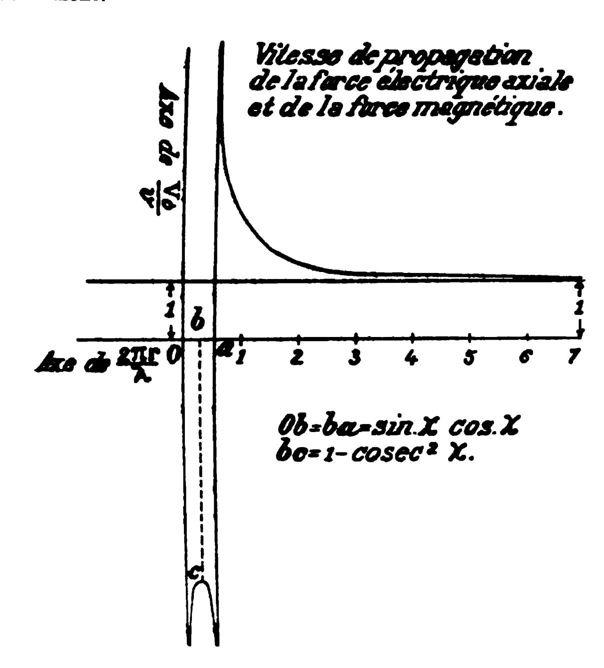


Fig. 70. — Vitesse de propagation de la force électrique axiale et de la force magnétique.

(Extrait des *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*).

La figure est purement schématique. En réalité, Oa n'est pas comparable à 01 et bc peut être de l'ordre de 20 000 unités de l'échelle verticale.

Le maximum négatif a lieu pour

$$r = \frac{\lambda \sin^2 \chi}{4\pi}$$

et sa grandeur est

$$v_0 = -\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \Omega.$$

Tant que l'amortissement n'est pas très important, ce maximum est donc très grand par rapport à la vitesse de la lumière.

Vitesse de propagation de la force électrique transverse.

32. La vitesse de propagation V_1 de l'onde transverse $\mathcal{E}_t$ est donnée par l'expression

$$\frac{V_1}{\Omega} = 1 + \frac{3\lambda^2}{4\pi^2 + \delta^2} \times \frac{(r - r_0)^2 + r_1^2}{r\left\{(r - r_0)^3 - r_0 r_1^2\right\}}$$

où l'on pose

$$r_0 = \lambda \frac{2\delta}{4\pi^2 + \delta^2}$$

$$r_1 = \frac{\lambda}{4\pi^2 + \delta^2} \sqrt{12\pi^2 - \delta^2}.$$

La vitesse ne dépend que de la distance à l'excitateur. Elle est encore infiniment petite et négative pour $r = 0$, et reste négative en passant par un minimum égal à

$$\left(1 - 1{,}59 \frac{1 - 1{,}19\, q^2}{\sin^2 \chi} q^2\right) \Omega$$

pour

$$r = \sin 2\chi \left(\frac{0{,}630}{q^2} + 0{,}625 + 0{,}0148\, q^4\right) \frac{\lambda}{2\pi}.$$

(On pose

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{4\sin^2\chi} - 1}}\Bigg)$$

Elle augmente ensuite et tend vers $-\infty$ pour

$$r = \sin 2\chi \left(1 + \frac{1}{q^2}\right) \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Elle passe alors brusquement à $+\infty$ et décroît ensuite constamment et tend vers la vitesse de la lumière quand r augmente indéfiniment (fig. 71).

La valeur correspondante dans le cas de l'oscillateur non amorti est

$$\frac{V_1}{\Omega} = 1 + \frac{3\lambda^2}{4\pi^2 r^2} + 9 \frac{\lambda^4}{16\pi^4 r^4}.$$

Vitesse de propagation de la force électrique totale dans le plan équatorial.

33. La vitesse V_2 de propagation de la force électrique totale dans le plan équatorial est

$$\frac{V_2}{\Omega} = 1 + \frac{\cos^2\chi\left\{(r - r_0)^2 + r_2^2\right\}}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 r\left\{(r - r_0)^2 (r + r_0) - 2r_2^2 (r - r_0) - r_2^2 r_0\right\}}$$

où l'on pose

$$r_2^2 = \cos^2\chi\,(\cos^2\chi - 3\sin^2\chi)\,\frac{\lambda^2}{4\pi^2}$$

r_0 et r_1 ont les mêmes valeurs que ci-dessus.

La formule correspondant, dans le cas de l'oscillateur non amorti, est

$$\frac{V_3}{\Omega} = 1 + \frac{1 + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2}{\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 \left[\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - 2\right]}.$$

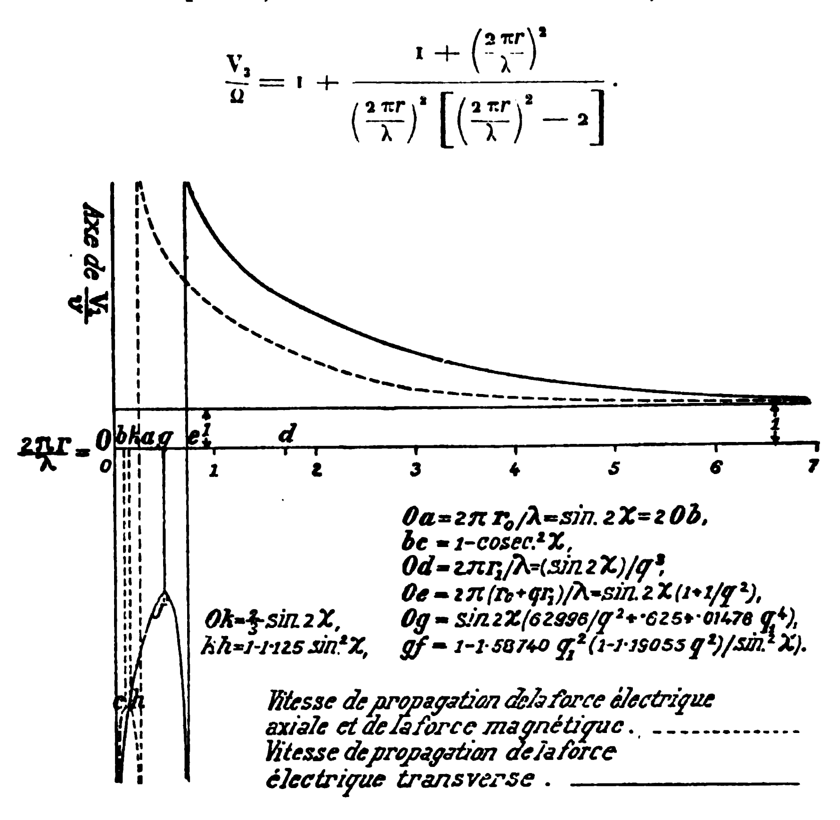


Fig. 71. — Vitesse de propagation de la force électrique axiale et de la force magnétique. Vitesse de propagation de la force électrique transverse.

(Extrait des *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*).

Pour $r = 0$, la vitesse est infiniment grande et positive ; elle décroît, passe par un minimum, puis croît et atteint de nouveau l'infini pour une petite valeur de r ; elle passe brusquement à $-\infty$, décroît et revient à moins l'infini ; passe à $+\infty$, décroît constamment, et atteint la valeur Ω pour $r = \infty$ (fig 72).

Conclusions. — 34. 1° La forme des surfaces d'onde qui se propagent dans l'espace est sensiblement différente de celles qu'on obtient avec un oscillateur non amorti ;

2° Si l'on décompose le champ électromagnétique en trois composantes :

1) Une composante de force électrique transverse, perpendiculaire au rayon vecteur qui joint le point considéré à l'origine ;

2) Une composante de force électrique axiale parallèle à l'axe de l'oscillateur ;

3) La force magnétique, perpendiculaire au plan méridien.

Les vitesses de propagation de ces différentes composantes sont indépendantes de la latitude φ et ne dépendent que de la distance à l'origine. Celles des deux dernières composantes sont les mêmes. Celle de la composante transverse est à partir d'une certaine distance, plus grande que les deux autres. Elles tendent toutes vers la vitesse de la lumière quand la distance augmente indéfiniment.

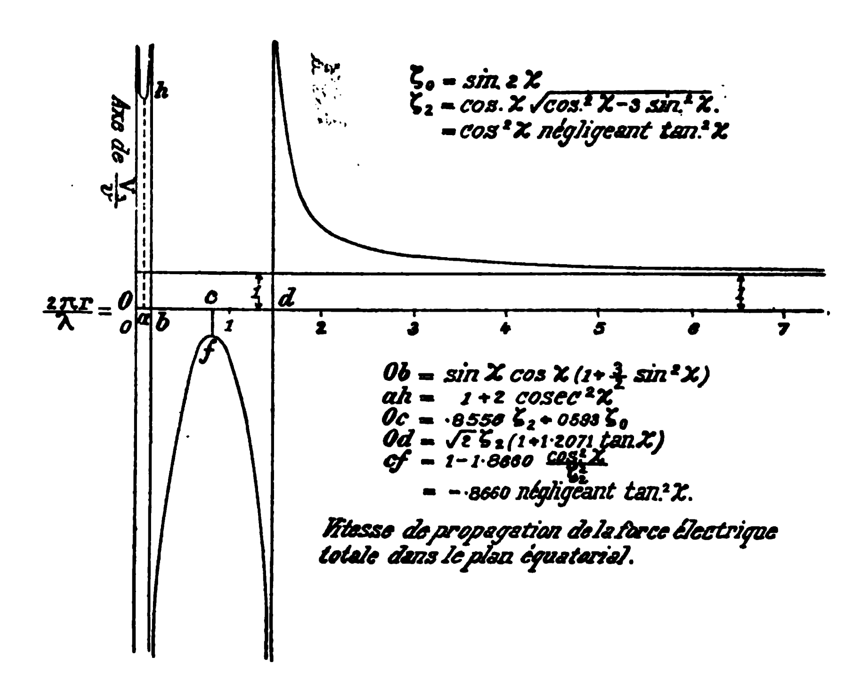


Fig. 72. — Vitesse de propagation de la force électrique totale dans le plan équatorial.

(Extrait des *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*).

La composante axiale varie, à partir d'une certaine distance, comme l'inverse du carré de la distance, et devient rapidement négligeable, quand la distance augmente, vis-à-vis de la composante transverse et de la force magnétique, qui varient comme l'inverse de la distance à l'oscillateur.

La composante axiale est indépendante de la latitude, la composante transverse et la force magnétique varient comme le cosinus de la latitude φ.

3° La propagation aux environs de l'oscillateur est extrêmement compliquée.

Critique de la théorie précédente.— *35.* M. M. Brillouin a fait remarquer, en 1904, que les hypothèses de K. Pearson et Miss Alice Lee ne correspondent pas aux conditions des expériences de Hertz. Dans celles-ci, la charge n'est pas nulle au temps $t = o$, mais a une certaine valeur finie, l'oscillateur étant chargé à ce moment. A. E. H. Love [2] a remarqué, de plus, que, par suite de la charge de l'oscillateur, il existe au début, dans l'espace un champ électrostatique dont il y a lieu de tenir compte, et a étudié dans ces conditions la propagation du front de l'onde. Nous allons indiquer les résultats qu'il a obtenus.

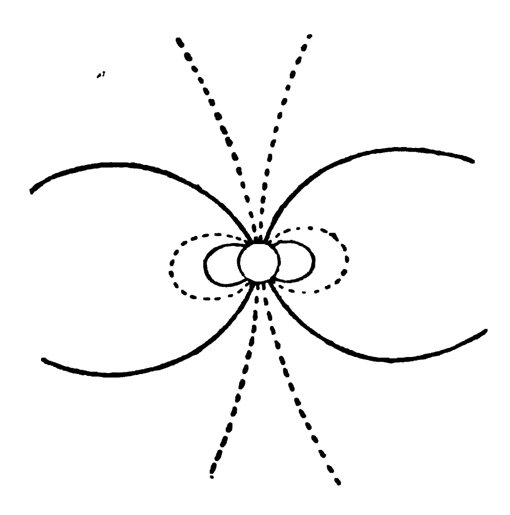


Fig. 73
(Extrait des *Proceedings of the Royal Society of London*)

b) Propagation du front d'onde (A. E. H. Love). — *36.* Pour tous les points de l'espace situés à une distance de l'oscillateur plus grande que Ωt ($t = o$ étant le début de l'oscillation), le champ est le champ électrostatique, qui est celui d'un doublet électrostatique (fig. 73), et a pour expressions :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{E}_{x0} = \frac{xz}{r^5} \cdot 3\mathrm{B} & \mathcal{H}_{x0} = o \\ \mathcal{E}_{y0} = \frac{yz}{r^5} \cdot 3\mathrm{B} & \mathcal{H}_{y0} = o \\ \mathcal{E}_{z0} = -\frac{x^2 + y^2}{r^5} \cdot 3\mathrm{B} + \frac{2}{r^3}\mathrm{B} & \mathcal{H}_{z0} = o \end{array}\right.$$

B étant le moment du doublet.

Aux points situés à l'intérieur de la sphère $\Omega t = r$, existe au contraire un champ électromagnétique produit par le doublet.

La sphère $\Omega t = r$ représente le front d'onde.

Sur cette sphère, les lignes de force électrique du champ électromagnétique intérieur doivent se raccorder aux lignes de force du champ électrostatique extérieur. Soient d'ailleurs

$$\mathcal{E}_x \quad \mathcal{E}_y \quad \mathcal{E}_z \qquad \mathcal{M}_x \quad \mathcal{M}_y \quad \mathcal{M}_z$$

les composantes du champ électromagnétique à l'intérieur de la sphère, on doit avoir, sur la sphère $\Omega t = r$:

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{x0} &= - n\,(\mathcal{M}_y - \mathcal{M}_{y0}) + m\,(\mathcal{M}_z - \mathcal{M}_{z0}) \\ \mathcal{E}_y - \mathcal{E}_{y0} &= - l\,(\mathcal{M}_z - \mathcal{M}_{z0}) + n\,(\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_{x0}) \\ \mathcal{E}_z - \mathcal{E}_{z0} &= - m\,(\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_{x0}) + l\,(\mathcal{M}_y - \mathcal{M}_{y0}) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{M}_x - \mathcal{M}_{x0} &= n\,(\mathcal{E}_y - \mathcal{E}_{y0}) - m\,(\mathcal{E}_z - \mathcal{E}_{z0}) \\ \mathcal{M}_y - \mathcal{M}_{y0} &= l\,(\mathcal{E}_z - \mathcal{E}_{z0}) - n\,(\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{x0}) \\ \mathcal{M}_z - \mathcal{M}_{z0} &= m\,(\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_{x0}) - l\,(\mathcal{E}_y - \mathcal{E}_{y0}). \end{aligned}\right.$$

Soit

$$f = \mathrm{E}\,.\,e^{-\delta\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{r}{\lambda}\right)} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{r}{\lambda} + \varepsilon\right).$$

$\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$ se déduisent de f par les expressions (9) et (11).

Portant ces valeurs ainsi que celles de $\mathcal{E}_{x0}$, $\mathcal{E}_{y0}$, $\mathcal{E}_{z0}$, $\mathcal{M}_{x0}$, $\mathcal{M}_{y0}$, $\mathcal{M}_{z0}$ dans les équations précédentes, on obtient :

$$\mathrm{E} \sin \frac{2\pi\varepsilon}{\lambda} = \mathrm{B} \qquad \mathrm{tg}\, \frac{2\pi\varepsilon}{\lambda} = \frac{2\pi}{\nu},$$

équations qui déterminent E et ε.

Les figures 74 à 81 et planche II représentent les lignes de force aux temps

0,26 T	0,385 T	0,51 T	0,635 T
0,76 T	0,885 T	1,01 T	1,135 T

Elles correspondent aux figures 17 à 24 de K. Pearson et Miss Alice Lee.

Les lignes de force sont tracées pour les valeurs suivantes de $\frac{\mathrm{Q}\lambda}{2\pi\mathrm{E}}$ (Q ayant la signification définie au § 28).

$\frac{\mathrm{Q}\lambda}{2\pi\mathrm{E}} \pm \frac{1}{100}$ lignes pointillées grosses

$\pm \frac{1}{10}$ lignes pleines grosses

$\pm \frac{3}{10}$ lignes pointillées fines

$\pm \frac{1}{2}$ lignes pleines fines

Elément de courant amorti

(Extrait des *Proceedings of the*

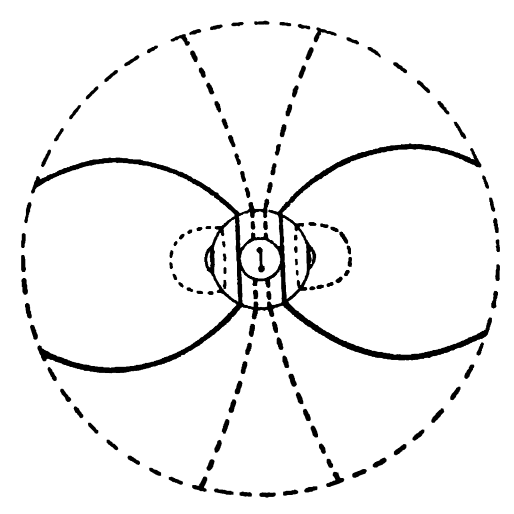


Fig. 74. — Temps : 0,26 × T

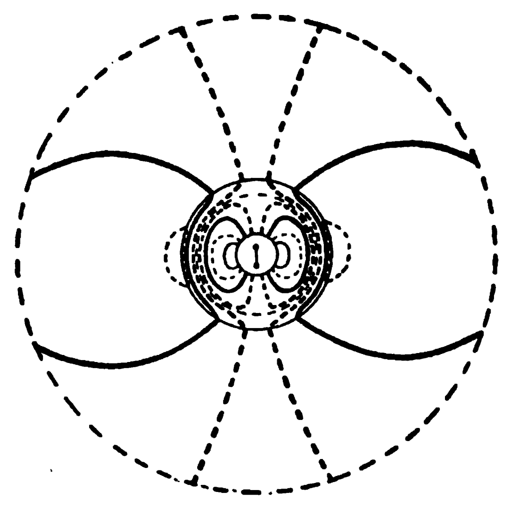


Fig. 75. — Temps : 0,385 × T

de A. E. H. Love

Royal Society of London).

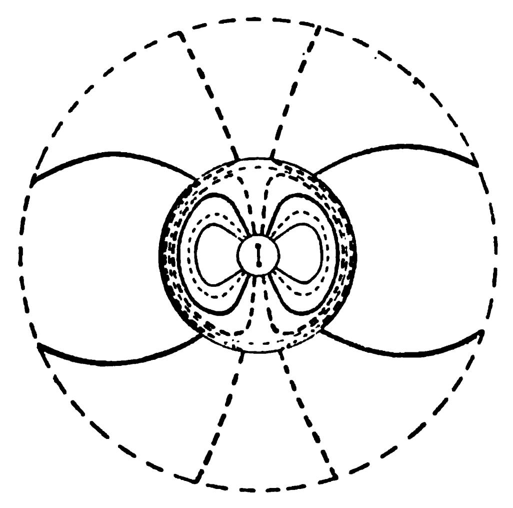


Fig. 76. — Temps : 0,51 × T

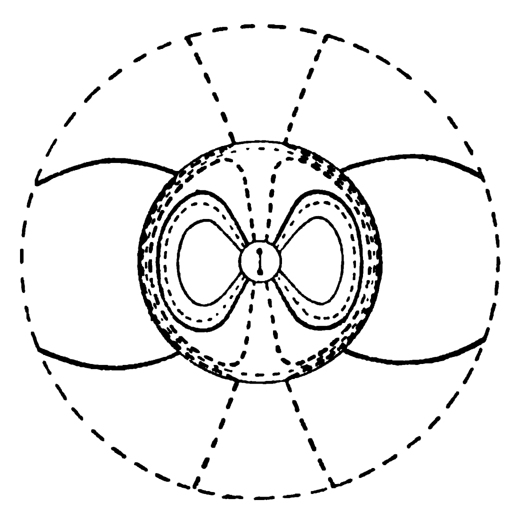


Fig. 77. — Temps : 0,635 × T

Elément de courant amorti

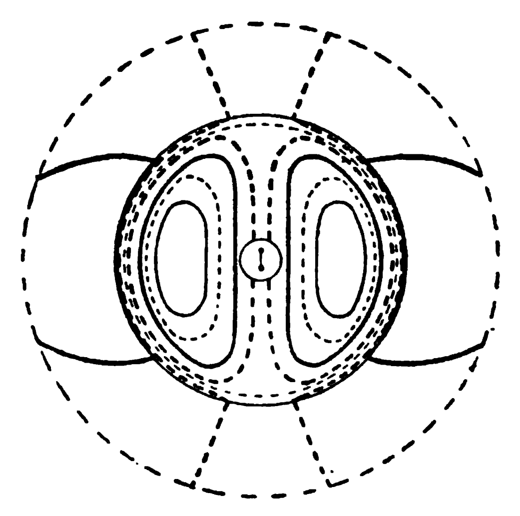


Fig. 78. — Temps : 0,76 × T

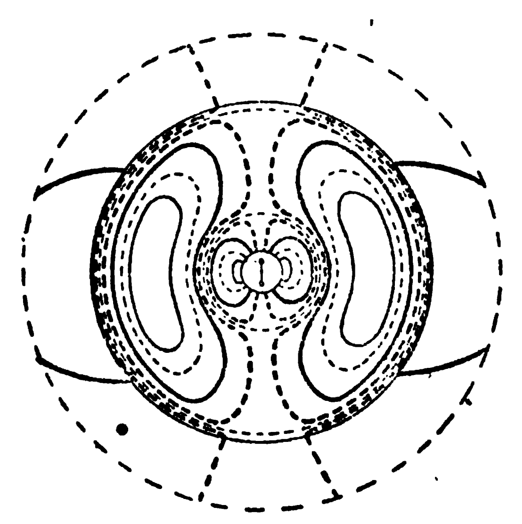


Fig. 79. — Temps : 0,885 × T

de A. E. H. Love

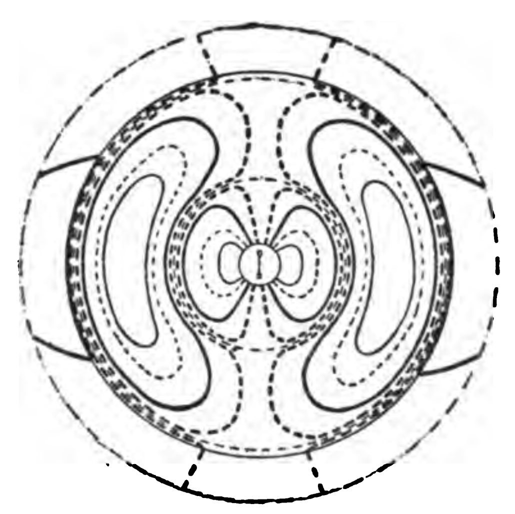


Fig. 80. — Temps : 1,01 × T

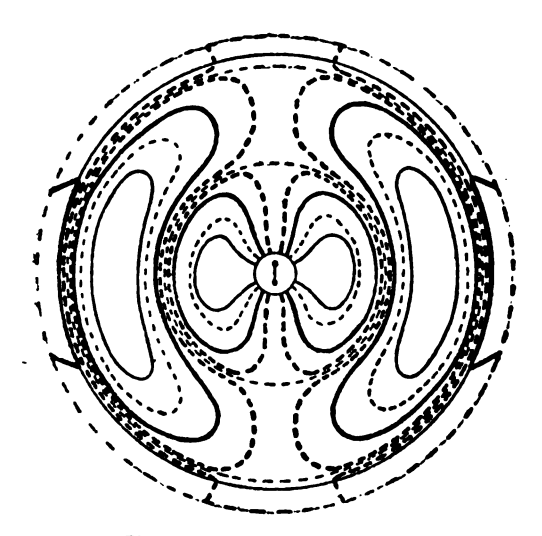


Fig. 81. — Temps : 1,135 × T

2° Champ électromagnétique des oscillateurs fermés.

I. — Circuit élémentaire périodique

37. Considérons maintenant un circuit élémentaire plan, parcouru par un courant d'intensité $\mathfrak{J}$

$$\mathfrak{J} = \mathrm{I} \cos \frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

que nous supposerons d'abord le même tout le long du circuit.

C'est un système de ce genre que Hertz employa pour la réception dans ses expériences classiques sur la haute fréquence, et qu'il appela résonateur.

Expression du champ électromagnétique.— *38*. Supposons le circuit placé à l'origine, dans le plan des xz, et cherchons d'abord le champ électromagnétique en un point N de ce plan, situé à une distance du circuit très grande par rapport à la longueur d'onde de l'oscillation.

Considérons un élément A_1B_1 du circuit, de longueur dl_1, soit φ l'angle qui fait, avec O_1N la normale à l'élément A_1B_1 tracée dans le plan des xz (fig. 82).

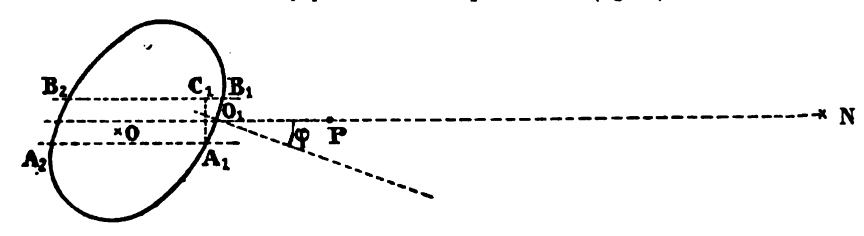


Fig. 82

Le champ électromagnétique dû à l'élément dl_1 a pour expressions

$$\begin{cases} d\mathcal{E}_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{dl_1}{\lambda}\frac{\mathrm{I}}{r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\cos\varphi \\ d\mathcal{M}_1 = 2\pi\frac{dl_1}{\lambda}\frac{\mathrm{I}}{r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\cos\varphi \end{cases}$$

ou, en écrivant seulement $d\mathcal{E}_1$, puisque $d\mathcal{M}_1$ n'en diffère que par le facteur $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$d\mathcal{E}_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{I}}{r_0}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0 - \mathrm{PO}_1\right) \times \mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$$

(On pose $r_0 = \mathrm{PN}$)

e point P étant choisi sur O_1N près du circuit considéré. A_1C_1 est la projection de A_1B_1 sur la normale à O_1M.

Soit A_2B_2 le deuxième élément découpé dans le circuit par les parallèles B_1B_2, A_1A_2 à O_1N. La force électrique due à cet élément a pour valeur

$$d\mathcal{E}_2 = -2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{I}{r_0}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0 - PO_2\right)\times A_1C_1$$

et le champ résultant des deux éléments $d\mathcal{E}_1$, $d\mathcal{E}_2$, a pour valeur :

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_1 + d\mathcal{E}_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{I}{r_0}\left[\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0 - PO_1\right) - \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0 - PO_2\right)\right]\times A_1C_1$$

$$d\mathcal{E} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{I}{r_0}\left[\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right)\left(\cos\frac{2\pi\times PO_1}{\lambda} - \cos\frac{2\pi\times PO_2}{\lambda}\right) - \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right)\left(\sin\frac{2\pi\times PO_1}{\lambda} - \sin\frac{2\pi\times PO_2}{\lambda}\right)\right]\times A_1C_1.$$

Si l'on suppose les dimensions du circuit très petites par rapport à la longueur d'onde on a :

$$\left(\frac{2\pi\times PO_1}{\lambda}\right)^2 \qquad \left(\frac{2\pi\times PO_2}{\lambda}\right)^2$$

négligeables par rapport à l'unité :

$$\cos\frac{2\pi\times PO_1}{\lambda} = \cos\frac{2\pi\times PO_2}{\lambda} = 1$$

$$\sin\frac{2\pi\times PO_1}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\times PO_1$$

$$\sin\frac{2\pi\times PO_2}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\times PO_2$$

et l'expression du champ électromagnétique devient :

$$-d\mathcal{E} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{I}{r_0}\times\frac{2\pi}{\lambda}(PO_2 - PO_1)\times A_1C_1\times\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right)$$

$$d\mathcal{E} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{I}{r_0}\times O_2O_1\times A_1C_1\times\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right)$$

$$d\mathcal{E} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{I}{r_0}\times d\Sigma\times\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right)$$

en posant

$$d\Sigma = \text{aire } A_1A_2B_2B_1.$$

Nous aurons, en intégrant cette expression et l'expression semblable que nous obtiendrions pour $d\mathcal{M}$, et en écrivant r à la place de r_0, le champ électromagnétique $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}$, à la distance r du circuit fermé : (r = ON).

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{I}{r} \times \Sigma \times \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) \\ \mathcal{M} &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{I}{r} \times \Sigma \times \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) \end{aligned}\right.$$

Si la droite ON, au lieu d'être située dans le plan du circuit élémentaire, fait l'angle θ avec ce plan, l'expression du champ électromagnétique sera :

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{I}{r}\,\Sigma\cos\theta\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{I}{r}\,\Sigma\cos\theta\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

39. Considérons un axe Oy perpendiculaire au plan du circuit élémentaire. On voit qu'il joue le rôle d'axe de révolution.

1° Le champ électromagnétique est constant sur des circonférences parallèles tracées autour de cet axe.

2° Sur des circonférences tracées autour de l'origine, par des plans méridiens passant par l'axe Oy, le champ électromagnétique varie comme le cosinus de l'angle θ qui fait avec le plan du circuit (plan équatorial), le rayon vecteur allant de l'origine au point considéré. La courbe polaire représentant la variation du champ électromagnétique avec l'angle θ a la forme de deux circonférences tangentes à l'axe Oy.

3° Les lignes de force électrique sont les circonférences ayant leur centre sur Oy et tracées dans les plans perpendiculaires à cet axe (circonférences parallèles).

4° Les lignes de force magnétique sont les circonférences tracées dans le plan méridien et ayant pour centre l'origine.

Remarque. — *40.* Les résultats obtenus correspondent exactement avec ceux que nous avait donnés l'étude d'un élément de courant linéaire, à condition de prendre comme axe de révolution la normale au circuit élémentaire, à la place de l'élément de courant, et de permuter entre eux les vecteurs électrique et magnétique.

Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*, l'élément de courant étant équivalent à un aimant élémentaire de moment IΣ.

Le problème que nous venons de traiter a été résolu par J.-A. Fleming en partant de cette considération, et en remplaçant, dans les calculs que nous avons fait précédemment, l'élément de courant, qui peut être assimilé à un élément électrique de moment $2lQ$, par un aimant élémentaire de moment $I\Sigma$.

Puissance moyenne rayonnée à travers une surface d'onde donnée. — *41*. A grande distance les surfaces d'onde sont des sphères, comme dans le cas de l'élément de courant linéaire, la force électrique est perpendiculaire à la force magnétique, et la puissance rayonnée à travers une surface donnée se calcule par la formule de Poynting, qui se réduit, à

$$P_r = \frac{1}{4\pi}\iint \mathcal{E}\mathcal{H} dS$$

et la puissance moyenne rayonnée à travers la surface entre les instants o et t est :

$$P_{r\ moy} = \frac{1}{4\pi t}\int_0^t dt \iint \mathcal{E}\mathcal{H} dS.$$

Prenant comme surface élémentaire la surface $2\pi r^2 \cos\theta\, d\theta$ d'une zone dont les rayons vecteurs font l'angle θ avec le plan des xz et d'angle au centre $d\theta$, et effectuant les calculs, on trouve successivement :

$$P_{r\ moy} = \frac{1}{4\pi t}\int_0^t dt \int \mathcal{E}\mathcal{H} \,.\, 2\pi r^2 \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\,\frac{16\pi^4}{\lambda^4}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{I^2}{r^2}\,\Sigma^2\, 2\pi r^2 \int_0^t dt \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta.$$

Mais

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) = \frac{1}{2}$$

d'où

$$P_{r\ moy} = \frac{1}{4\pi}\,.\,\frac{16\pi^4}{\lambda^4}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{I^2}{r^2}\,\Sigma^2\,.\,2\pi r^2\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{4}{3}$$

$$= \frac{16}{3}\pi^4\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\Sigma^2}{\lambda^4}\,I^2$$

$$P_{r\ moy} = \frac{32}{3}\pi^4\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\Sigma^2}{\lambda^4}\,I_{eff}^2$$

$$P_{r\ moy} = \frac{2}{3}\sqrt{\mu\varepsilon}\,\varepsilon\mu^2\,\omega^4\,\Sigma^2\,I_{eff}^2.$$

II. — Circuit élémentaire périodique amorti

42. Supposons maintenant un circuit élémentaire parcouru par un courant périodique amorti de la forme (35)

$$\mathfrak{I} = -\mathrm{I}\, e^{-\frac{\delta}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi + \chi\right).$$

Dans cette expression

δ représente le décrément logarithmique de l'oscillation,

λ représente la longueur d'onde,

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques,

ψ est la phrase originelle de l'oscillation de la quantité d'électricité

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Le champ électromagnétique dû à l'élément A_1B_1 (fig. 82) a pour expression (équation 46) (en écrivant seulement l'expression de la force électrique)

$$d\mathcal{E}_1 = -2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{dl_1}{\lambda}\frac{\mathrm{I}}{r}\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\, e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi + 2\chi\right]$$

$$d\mathcal{E}_1 = -2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{I}}{r} \times A_1C_1 \times \frac{1}{\cos\chi}\, e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0 - PO_1\right) + \psi + 2\chi\right]$$

De même, pour l'élément A_2B_2

$$d\mathcal{E}_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{I}}{r} \times A_1C_1 \times \frac{1}{\cos\chi}\, e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0 - PO_2\right) + \psi + 2\chi\right]$$

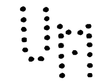
et

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_1 + d\mathcal{E}_2$$

$$d\mathcal{E} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{I}}{r} \times A_1C_1 \times \frac{1}{\cos\chi}\, e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \times$$

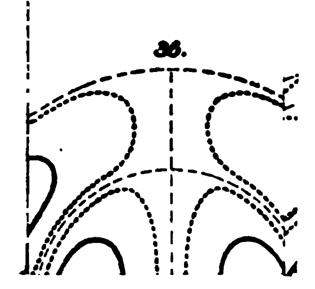
$$\times\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0 - PO_2\right) + \psi + 2\chi\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0 - PO_1\right) + \psi + 2\chi\right]\right\}$$

IE II.



$\left(3 + \frac{3}{5}\right)$

PLA



2° D'

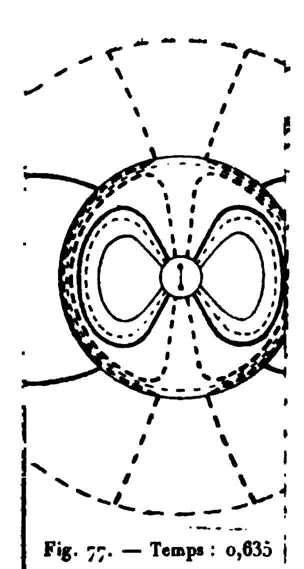


Fig. 77. — Temps : 0,635

Figure à co

$$d\mathcal{E} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{I}{r} \times A_1C_1 \times \frac{1}{\cos\chi} e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \times$$

$$\times \left\{ \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right) + \psi + 2\chi\right] \left(\cos\frac{2\pi \times PO_2}{\lambda} - \cos\frac{2\pi \times PO_1}{\lambda}\right) \right.$$

$$\left. + \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right) + \psi + 2\chi\right] \left(\sin\frac{2\pi \times PO_2}{\lambda} - \sin\frac{2\pi \times PO_1}{\lambda}\right) \right\}$$

ou, puisque $(2\pi \times PO_1)^2$ et $(2\pi \times PO_2)^2$ sont négligeables par rapport à λ^2

$$d\mathcal{E} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\frac{I}{r} \times A_1C_1 \times \frac{1}{\cos\chi} e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \times$$

$$\times \frac{2\pi}{\lambda} \times O_2O_1 \times \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right) + \psi + 2\chi\right]$$

$$d\mathcal{E} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{I}{r} \times d\Sigma \frac{1}{\cos\chi} e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r_0\right) + \psi + 2\chi\right].$$

En intégrant cette expression et écrivant r à la place de r_0, nous avons enfin, pour l'expression du champ électromagnétique dû au circuit élémentaire :

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{I}{r}\frac{1}{\cos\chi} \Sigma e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi + 2\chi\right]$$

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{I}{r}\frac{1}{\cos\chi} \Sigma e^{-\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi + 2\chi\right]$$

II. — Radiocommunications au moyen d'oscillateurs ouverts ou d'oscillateurs fermés

1° Radiocommunications par oscillateurs ouverts

I. — Le problème de la transmission

Différentes formes de l'énergie dans un oscillateur. — *43.* Dans un élément de courant possédant résistance, inductance, capacité et radiance l'énergie apparaît sous quatre formes différentes.

1° Sous forme d'énergie potentielle, elle s'emmagasine dans la capacité, en quantité égale à

$$W_p = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{Q}^2}{C}$$

si $\mathfrak{Q}$ est la charge instantanée et C la capacité. La puissance instantanée correspondante est

$$P_p = \frac{dW_p}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{c} \mathfrak{Q} \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} \tag{55}$$

2° Sous forme d'énergie cinétique, elle apparaît dans la self-induction, en quantité égale à

$$W_c = \frac{1}{2} L\mathfrak{J}^2 = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right)^2$$

L étant la self induction et $\mathfrak{J}$ l'intensité du courant.

La puissance instantanée correspondante est

$$P_c = \frac{dW_c}{dt} = L \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2}. \tag{56}$$

3° Sous forme d'énergie dissipée en chaleur dans le conducteur, en quantité égale à

$$W_j = R \int \mathfrak{J}^2 dt = R \int \left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right)^2 dt.$$

La puissance correspondante est

$$P_j = \frac{dW_j}{dt} = R \left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right)^2. \tag{57}$$

4° Enfin l'énergie est dissipée en partie sous forme de rayonnement.

Il s'agit d'évaluer la puissance rayonnée. Nous emploierons pour cela une méthode indiquée par M. PLANCK ([1]).

44. Si l'on suppose que les dimensions de l'excitateur soient très petites par rapport à la longueur d'onde de l'oscillation supposée périodique ou périodique amortie ; elles seront également très petites par rapport aux longueurs représentées par l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{X}{\frac{dX}{dt}} \tag{58}$$

X représentant l'une quelconque des coordonnées $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$, du champ électromagnétique dans le diélectrique entourant l'excitateur.

Sauf aux moments auxquels $\frac{dX}{dt}$ est très voisin de zéro. Mais la variation

de l'énergie contenue dans un volume donné du diélectrique peut s'écrire (§ 9, ch. I)

$$dW_r = dt \int \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot 2 \left(\mathcal{E}_x \frac{d\mathcal{E}_x}{dt} + \mathcal{E}_y \frac{d\mathcal{E}_y}{dt} + \mathcal{E}_z \frac{d\mathcal{E}_z}{dt} \right) d\tau +$$

$$+ dt \int \frac{\mu}{8\pi} \cdot 2 \left(\mathcal{H}_x \frac{d\mathcal{H}_x}{dt} + \mathcal{H}_y \frac{d\mathcal{H}_y}{dt} + \mathcal{H}_z \frac{d\mathcal{H}_z}{dt} \right) d\tau$$

dW_r est donc l'intégrale d'une somme de termes de la forme

$$X \frac{dX}{dt}.$$

Les éléments de l'intégrale pour lesquels $\frac{dX}{dt}$ est voisin de zéro sont très petits par rapport aux autres, qui restent seuls à considérer ; mais, pour ces termes $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{X}{\frac{dX}{dt}}$ est négligeable. On pourra donc, dans le calcul de dW_r, supposer $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{X}{\frac{dX}{dt}}$ négligeable pour toutes les valeurs de X.

Evaluons la quantité d'énergie dW_r rayonnée à travers une sphère ayant pour centre l'origine, et de rayon r_1 supposé grand par rapport aux dimensions linéaires de l'oscillateur, mais petit par rapport aux expressions de la forme (58).

La loi de Poynting donne, comme expression du flux d'énergie :

$$dW_r = \frac{dt}{4\pi} \int \left[(\mathcal{E}_y \mathcal{H}_z - \mathcal{E}_z \mathcal{H}_y) \frac{x}{r} + (\mathcal{E}_z \mathcal{H}_x - \mathcal{E}_x \mathcal{H}_z) \frac{y}{r} + (\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y - \mathcal{E}_y \mathcal{H}_x) \frac{z}{r} \right] d\sigma \quad (59)$$

l'intégration étant étendue à la surface de la sphère.

Nous avons, pour

$$\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z \qquad \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z$$

les expressions suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \\ \mathcal{E}_y &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \\ \mathcal{E}_z &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial \Pi}{\partial t^2} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{H}_x &= \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} \\ \mathcal{H}_y &= - \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{dx dt} \\ \mathcal{H}_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

ou, en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{dz}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}\right)$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}\frac{z}{r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial \Pi}{\partial r}\left(-\frac{x}{r^2} \cdot \frac{z}{r}\right)$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{xz}{r^2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right)$$

et comme

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 (r\Pi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi)$$

ou

$$\varepsilon\mu r \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 2\frac{\partial \Pi}{\partial r} + r\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} \tag{60}$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{xz}{r^2}\left(\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right)$$

$$\mathcal{E}_x = \left(\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) \cos \varphi \sin \theta \cos \theta. \tag{61}$$

De même

$$\mathcal{E}_y = \left(\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \tag{62}$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}$$

$$\mathcal{E}_z = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}\right)$$

$$\mathcal{E}_z = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{z}{r} + \frac{\partial \Pi}{\partial r}\left(-\frac{z}{r^2} \cdot \frac{z}{r} + \frac{1}{r}\right)$$

$$\mathcal{E}_z = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \frac{z^2}{r^2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

ou, d'après (46)

$$\mathcal{E}_z = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \frac{z^2}{r^2}\left(\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

ou, comme

$$\frac{z}{r} = \cos \theta$$

$$\mathcal{E}_z = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}(1 - 3\cos^2 \theta). \tag{63}$$

Nous avons encore

$$\mathcal{M}_x = \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}$$

$$\mathcal{M}_x = \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} \sin \varphi \sin \theta. \tag{64}$$

De même

$$\mathcal{M}_y = - \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} \cos \varphi \sin \theta. \tag{65}$$

En résumé, nous avons, en coordonnées polaires

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \left(\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \\ \mathcal{E}_y &= \left(\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\ \mathcal{E}_z &= - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} (1 - 3 \cos^2 \theta) \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} \sin \varphi \sin \theta \\ \mathcal{M}_y &= - \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} \cos \varphi \sin \theta \\ \mathcal{M}_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Portons ces valeurs dans l'équation (45) il vient

$$d\mathrm{W}_r = \frac{dt}{4\pi} \int \varepsilon \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_1 \partial t} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \Pi}{\partial r_1} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}\right) d\sigma$$

en écrivant, pour simplifier, $\frac{\partial \Pi}{\partial r_1}$ au lieu de $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right)_{r = r_1}$

$$\mathrm{W}_r = \frac{dt}{4\pi} \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_1 \partial t} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \Pi}{\partial r_1} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}\right) \int d\sigma \sin^2 \theta.$$

$$d\mathrm{W}_r = \frac{2}{3} \varepsilon r_1 \, dt \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_1 \partial t} \left(1 \frac{\partial \Pi}{\partial r_1} - \varepsilon\mu r_1 \frac{\partial_2 \Pi}{\partial t^2}\right)$$

$$d\mathrm{W}_r = \frac{dt}{3} \varepsilon r_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_1}\right)^2 - 2 \varepsilon\mu r_1 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_1 \partial t} \right\}. \tag{68}$$

Mais

$$\Pi = \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)}{r}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} f'$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} f''$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Pi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)}{r}\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{r^2}f - \frac{1}{r}f'\right]$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(-\frac{1}{r^2}f' - \frac{1}{r}f''\right)$$

f' et f'' indiquant des dérivations par rapport à $\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$

d'où

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r_1\partial t}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon\mu)^3}}\left(-\frac{1}{r_1^2}f'f'' - \frac{1}{r_1^2}f''^2\right)$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r_1\partial t}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f'^2}{2r_1^2} + \frac{f'f''}{r_1^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon\mu)^3}}\frac{f'f'''}{r_1^2}.$$

Portons dans (68) il vient

$$dW_r = dt\left[\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\frac{r_1}{3}\left\{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial r_1}\right)^2 + 2\left(\frac{f'^2}{2r_1^2} + \frac{f'f''}{r_1}\right)\right\} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}}f'f'''\right]$$

$$dW_r = dt\left[\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}f'f'''\right] \qquad (69)$$

en posant

$$U = \varepsilon\frac{r_1}{3}\left\{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial r_1}\right)^2 + 2\left(\frac{f'^2}{2r_1^2} + \frac{f'f''}{r_1}\right)\right\}. \qquad (70)$$

Nous avons supposé (44).

$2l$ petit par rapport à r_1

puis r_1 petit par rapport à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{X}{\frac{\partial X}{\partial t}}$.

Donc

$$\sqrt{\varepsilon\mu}\, r_1\frac{\partial X}{\partial t} \text{ petit par rapport à } X \qquad (71)$$

et comme, d'après les équations fondamentales du champ électromagnétique $\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\partial X}{\partial t}$ est de l'ordre de $\frac{\partial X}{\partial u}$, u représentant l'un quelconque des symboles x, y, z, et X l'une quelconque des composantes du champ électromagnétique ; on en déduit que le produit

$$r_1\frac{dX}{du} \text{ petit par rapport à X.}$$

L'expression (57) nous montre que

$$\sqrt{\varepsilon\mu}\, r_1 \frac{\partial f}{\partial t} \text{ petit par rapport à } f$$

$$\sqrt{\varepsilon\mu}\, r_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \text{ petit par rapport à } f'.$$

On peut donc, sans erreur sensible, supposer que $r_1 = 0$ dans l'expression de f, f', f'', etc., et considérer f comme fonction de t seulement.

L'équation (69) nous donne l'expression cherchée de P_f

$$P_r = \frac{dW_r}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}} f' f'' \tag{72}$$

f étant fonction de t seulement, nous pouvons poser, d'après l'équation (10)

$$f = \frac{2\,l}{\varepsilon}\,\mathfrak{Q}$$

d'où

$$f' = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\partial\mathfrak{Q}}{dt}\cdot\frac{2\,l}{\varepsilon}$$

$$f'' = \varepsilon\mu\cdot\frac{2\,l}{\varepsilon}\frac{\partial^2\mathfrak{Q}}{\partial t^2}$$

$$f''' = \sqrt{(\varepsilon\mu)^3}\,\frac{2\,l}{\varepsilon}\frac{\partial^3\mathfrak{Q}}{\partial t^3}$$

et finalement

$$P_r = \frac{dU}{dt} - \frac{2}{3}(2\,l)^2\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\mu\cdot\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2}. \tag{73}$$

Posons

$$\frac{2}{3}(2\,l)^2\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\mu = S. \tag{74}$$

On a

$$P_r = \frac{dU}{dt} - S\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2}. \tag{75}$$

La puissance totale dépensée dans l'excitateur a pour expression

$$P = P_p + P_e + P_j + P_r = \frac{1}{C}\,\mathfrak{Q}\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2}\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + R\left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right)^2 - S\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{C}\frac{\mathfrak{Q}^2}{2} + \frac{L}{2}\left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right)^2 + U\right] + R\left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right)^2 - S\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2}\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} \tag{76}$$

Examinons le terme

$$\frac{1}{C}\frac{Q^2}{2} + \frac{L}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + U. \tag{77}$$

On a

$$U = \frac{\varepsilon r_1}{3}\left\{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial r_1}\right)^2 + 2\left(\frac{f^2}{2\,r_1^2} + \frac{f f''}{r_1}\right)\right\}. \tag{78}$$

Le terme

$$\frac{f'f''}{r_1} \text{ est très petit par rapport à } \frac{f'^2}{2r_1^2}$$

puisque

$$r_1 f'' \text{ est très petit par rapport à } f'.$$

Il reste

$$U = \frac{\varepsilon r_1}{3}\left\{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r_1}\right)^2 + \frac{f'^2}{r_1^2}\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon r_1}{3}\left\{\left(\frac{1}{r_1^2}f + \frac{1}{r_1}f'\right)^2 + \frac{f'^2}{r_1^2}\right\}$$

$\frac{1}{r_1}f'$ est petit par rapport à $\frac{1}{r_1^2}f$, et $\frac{f'^2}{r_1^2}$ est petit par rapport à $\frac{f^2}{r^4}$.

Il reste

$$U = \frac{\varepsilon f}{3r_1^3} = \frac{\varepsilon}{3r_1^3}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2l}\,\mathfrak{Q}\right)^2$$

et l'expression (61) s'écrit :

$$\frac{1}{C}\frac{\mathfrak{Q}^2}{2} + \frac{L}{2}\left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right)^2 + \frac{4l^2\mathfrak{Q}^2}{3r_1^3\varepsilon}$$

$$\frac{1}{2C} \text{ est grand par rapport à } \frac{4l^2}{3r_1^3\varepsilon}.$$

Ainsi qu'on le voit en formant, par élévation au carré des expressions (66) et (67) l'expression de la densité d'énergie pour $r = r_1$. et remarquant qu'elle est très petite par rapport à l'expression de la densité d'énergie à des distances très petites par rapport à r_1.

Donc U est négligeable devant $\frac{1}{C}\frac{\mathfrak{Q}^2}{2}$, et l'expression (61) se réduit à

$$\frac{1}{c}\frac{\mathfrak{Q}^2}{2} + \frac{L}{2}\left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right)^2.$$

On en déduit, pour valeur finale de l'expression (76).

$$P = \frac{1}{C}\,\mathfrak{Q}\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + R\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2}\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} - S\frac{d^3\mathfrak{Q}}{dt^3}\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} \qquad (79)$$

Nous obtiendrons, dans les différents cas, l'équation différentielle du phénomène en écrivant que cette expression, qui représente la puissance dépensée dans l'excitateur, est égale à celle de la puissance fournie à l'excitateur.

Alimentation par une source à force électromotrice périodique. — *45*. Soit

$$\mathfrak{U} = U \sin \omega t$$

la force électromotrice de la source, supposée périodique.

La puissance fournie à l'excitateur est

$$\mathcal{U}\mathcal{I} = U \sin \omega t \frac{d\mathcal{Q}}{dt}$$

et l'équation différentielle du phénomène s'écrit :

$$\frac{1}{C}\mathcal{Q}\frac{d\mathcal{Q}}{dt} + R\frac{d\mathcal{Q}}{dt}\frac{d\mathcal{Q}}{dt} + L\frac{d^2\mathcal{Q}}{dt^2}\frac{d\mathcal{Q}}{dt} - S\frac{d^3\mathcal{Q}}{dt^3}\frac{d\mathcal{Q}}{dt} - U \sin \omega t \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = 0$$

ou, en divisant les deux membres par $\frac{d\mathcal{Q}}{dt}$

$$\frac{1}{C}\mathcal{Q} + R\frac{d\mathcal{Q}}{dt} + L\frac{d^2\mathcal{Q}}{dt^2} - S\frac{d^3\mathcal{Q}}{dt^3} - U \sin \omega t = 0. \qquad (80)$$

C'est une équation différentielle linéaire. On trouve facilement la solution de régime : elle est égale à

$$\mathcal{Q} = -\frac{U}{\omega\sqrt{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}\cos(\omega t - \gamma) \qquad (81)$$

en posant

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + S\omega^2}. \qquad (82)$$

On en déduit

$$\mathcal{I} = \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \frac{U}{\sqrt{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}\sin(\omega t - \gamma) \qquad (83)$$

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \qquad (84)$$

La puissance moyenne dépensée sous forme de chaleur est

$$P_{j\,moy} = RI_{eff}^2 = R\frac{U_{eff}^2}{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad (85)$$

La puissance moyenne rayonnée est

$$P_{r\,moy} = S\omega^2 I_{eff}^2 = S\omega^2\frac{U_{eff}^2}{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \qquad (86)$$

La somme de la puissance moyenne dépensée sous forme de chaleur et de la puissance moyenne rayonnée est, ainsi qu'on devait s'y attendre, égale à la puissance moyenne fournie au circuit.

$$P_{moy} = (R + S\omega^2)\, I_{eff}^2. \qquad (87)$$

L'énergie $P_{r\,moy}$ est l'énergie utile de la transmission. Le rendement de l'excitateur est donc

$$\eta = \frac{P_{r\,moy}}{P_{j\,moy} + P_{r\,moy}} = \frac{S\omega^2}{R + S\omega^2}. \qquad (88)$$

Discussion. — *46.* **Résonance.** L'énergie dépensée sous forme de chaleur et l'énergie absorbée sont maxima quand

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \qquad (89)$$

c'est-à-dire quand il y a résonance entre la source d'énergie et l'excitateur. Les expressions précédentes deviennent dans ce cas particulier

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R + S\omega^2} \qquad (90)$$

$$P_{j\,moy} = R\,\frac{U_{eff}^2}{(R + S\omega^2)^2} \qquad (91)$$

$$P_{r\,moy} = S\omega^2\,\frac{U_{eff}^2}{(R + S\omega^2)^2} \qquad (92)$$

Cas particuliers. *Rendement maximum.* — *47.* Le rendement

$$\eta = \frac{S\omega^2}{R + S\omega^2}$$

est égal à 1 si la résistance est négligeable par rapport au terme $S\omega^2$. Posons $R = 0$: il vient

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{S\omega^2} \qquad (93)$$

$$P_{j\,moy} = 0$$

$$P_{r\,moy} = \frac{U_{eff}^2}{S\omega^2} \qquad (94)$$

Puissance rayonnée maxima. — *48.* Supposons donnée la résistance de l'excitateur. La puissance rayonnée passe par un maximum quand

$$S\omega^2 = R. \qquad (95)$$

Alors

$$P_{r\,moy} = \frac{U_{eff}^2}{4R} \qquad (96)$$

$$P_{j\,moy} = \frac{U_{eff}^2}{4R} \qquad (97)$$

C'est la quantité maxima d'énergie qui puisse être rayonnée par un excitateur de résistance R.

Le rendement de l'excitateur est alors

$$\eta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \tag{98}$$

Remarque I. — L'intensité du courant trouvée dans le cas de l'alimentation par une source à force électromotrice alternative, est la même que celle qu'on trouverait pour un circuit ayant même capacité et même self-induction, et une résistance égale à

$$R + S\omega^2.$$

Le terme $S\omega^2$ est souvent appelé résistance de rayonnement. Cette dénomination semble mauvaise, le terme $S\omega^2$ quoique ayant les mêmes dimensions qu'une résistance, en différant par ses caractéristiques : il varie avec la période du courant ; il ne dépend pas de la conductibilité ; le facteur S ne dépend que de la forme et des dimensions du conducteur.

C'est pourquoi nous avons proposé pour la grandeur S, qui caractérise les propriétés du corps au point de vue rayonnement, le nom de *radiance*.

Remarque II. — *50*. Nous n'avons examiné jusqu'ici que l'état de régime du système soumis à une force électromotrice alternative. Avant l'établissement du régime, se superposent au terme que nous avons étudié des termes qui s'amortissent progressivement et que nous allons considérer dans le paragraphe suivant.

Oscillations libres.—*51*. Supposons que le système, après avoir été dérangé d'une façon quelconque de son état d'équilibre électrique, soit brusquement abandonné à lui-même. La force électromotrice extérieure est alors nulle, et l'équation différentielle du phénomène est :

$$\frac{1}{C}\mathfrak{Q} + R\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2} - S\frac{d^3\mathfrak{Q}}{dt^3} = 0. \tag{99}$$

L'équation (81) a une solution de la forme.

$$\mathfrak{Q} = A_1e^{x_1t} + A_2e^{x_2t} + A_3e^{x_3t} \tag{100}$$

x_1, x_2, x_3 étant les racines de l'équation du 3e degré

$$Sx^3 - Lx^2 - Rx - \frac{1}{C} = 0. \tag{101}$$

Nous avons vu plus haut que, *dans le cas de l'état de régime, la solution est la même que pour un circuit possédant la même self, la même capacité,*

et une résistance égale à $R + S\omega^2$. Nous sommes ainsi amenés à assimiler les deux cas.

Mais on sait que, dans le deuxième, tant que

$$\left(\frac{R + S\omega^2}{4L^2}\right)^2 < \frac{1}{CL},$$

les oscillations libres seraient périodiques amorties de la forme

$$Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \psi) = B_1 e^{(-\alpha + i\omega)t} + B_2 e^{(-\alpha - i\omega)t} \qquad (102)$$

avec

$$\alpha = \frac{R + S\omega^2}{2L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R + S\omega^2}{2L}\right)^2}$$

Par similitude, nous pouvons penser que l'équation (101) aura deux racines imaginaires, pour les valeurs de $\frac{(R + S\omega^2)^2}{L^2}$ petites par rapport à $\frac{1}{CL}$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = -\beta + i\varpi \\ x_3 = -\beta - i\varpi \end{array}\right\} \qquad (103)$$

β et ϖ ayant des valeurs que nous pouvons poser égales à

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \alpha(1 + \varepsilon_1) \\ \varpi = \omega(1 + \varepsilon_2) \end{array}\right\}. \qquad (104)$$

Nous avons d'ailleurs

$$Sx^3 - Lx^2 - Rx - \frac{1}{C} = S(x - x_1)(x - x_2)x - x_3)$$

$$= S(x - x_1)(x + \beta - i\varpi)(x + \beta + i\varpi)$$

$$= Sx^3 + Sx^2(2\beta - x_1) + Sx(\beta^2 + \varpi^2 - 2x_1\beta) - Sx_1(\beta^2 + \varpi^2)$$

d'où, en identifiant les coefficients des différentes puissances de x :

$$\left\{\begin{array}{l} -L = S(2\beta - x_1) \\ -R = S(\beta^2 + \varpi^2 - 2\beta x_1) \\ \frac{1}{C} = Sx_1(\beta^2 + \varpi^2) \end{array}\right\}$$

Eliminons x_1 entre ces 3 équations : il vient

$$\left.\begin{array}{l} -R = S\left[\beta^2 + \varpi^2 - 2\beta\left(2\beta + \frac{L}{S}\right)\right] \\ \frac{1}{C} = S\left(2\beta + \frac{L}{S}\right)\left(\beta^2 + \varpi^2\right) \end{array}\right\} \qquad (105)$$

$$\left\{\begin{array}{l} -R = S\left\{\alpha^2(1+\varepsilon_1)^2 + \omega^2(1+\varepsilon_2)^2 - 2\alpha(1+\varepsilon_1)\left[2\alpha(1+\varepsilon_1)+\frac{L}{S}\right]\right\} \\ \frac{1}{C} = S\left[2\alpha(1+\varepsilon_1)+\frac{L}{S}\right]\left[\alpha^2(1+\varepsilon_1)^2+\omega^2(1+\varepsilon_2)^2\right] \end{array}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} -R = S\left[\alpha^2 + \omega^2 - 2\alpha\left(2\alpha+\frac{L}{S}\right)\right] + G\varepsilon_1 + H\varepsilon_2 \\ \frac{1}{C} = S\left(2\alpha+\frac{L}{S}\right)\left(\alpha^2+\omega^2\right) + K\varepsilon_1 \end{array}\right.$$

ou, en remplaçant α et ω par leurs valeurs en fonction de R, L, S, C.

$$\left\{\begin{array}{l} -R = S\left[\frac{1}{CL} - 2\frac{R+S\omega^2}{2L}\left(2\frac{R+S\omega^2}{2L}+\frac{L}{S}\right)\right] + G\varepsilon_1 + H\varepsilon_2 \\ \frac{1}{C} = S\left(2\frac{R+S\omega^2}{2L}+\frac{L}{S}\right)\frac{1}{CL} + K\varepsilon_1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} R + \frac{S}{CL} - \frac{(R+S\omega^2)^2}{L^2}S - 2(R+S\omega^2) + G\varepsilon_1 + H\varepsilon_2 = 0 \\ \frac{1}{C} - \frac{1}{C}\left(1 + S\frac{R+S\omega^2}{L^2}\right) - K\varepsilon_1 = 0. \end{array}\right\} \quad (106)$$

Mais on a

$$S\frac{R+S\omega^2}{L^2} < \frac{(R+S\omega^2)^2}{L^2\omega^2}$$

et

$$\frac{(R+S\omega^2)^2}{L^2\omega^2} = \frac{(R+S\omega^2)^2}{L^2 \cdot \frac{1}{CL}} \text{ très petit par rapport à } 1$$

puisque nous supposons

$$\frac{(R^2+S\omega^2)^2}{L^2} \text{ très petit par rapport à } \frac{1}{CL}$$

$$S\frac{R+S\omega^2}{L^2} \text{ est négligeable par rapport à } 1$$

de plus

$$\omega^2 = \frac{1}{CL} \text{ sensiblement}$$

et les équations (106) deviennent, η_1 et η_2 étant des quantités infiniment petites

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 + G\varepsilon_1 + H\varepsilon_2 = 0 \\ \eta_2 + K\varepsilon_1 = 0 \end{array}\right.$$

relations qui montrent que ε_1 et ε_2 sont des infiniments petits.

On a donc, à des infiniments petits près, quand $\frac{(R + S\omega^2)^2}{L^2}$ est négligeable devant $\frac{1}{CL}$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta &= \alpha = \frac{R + S\omega^2}{2L} \\ \varpi &= \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \end{aligned} \right\} \tag{107}$$

La racine x_1 de l'équation (83) serait positive. Elle correspondrait donc à un terme croissant indéfiniment avec le temps et qui n'a aucune réalité physique. En écrivant les conditions aux limites pour $t = \infty$ on aurait toujours $A_1 = 0$.

52. *En résumé, l'oscillateur doué de capacité, résistance, radiance et self-induction est, au point de vue des oscillations libres comme au point de vue des oscillations forcées, assimilable à un circuit ayant même capacité, même self-induction, et ayant une résistance égale à*

$$R + S\omega^2.$$

L'oscillation libre est une oscillation périodique amortie de la forme

$$Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t - \varphi). \tag{108}$$

Tant que

$$\frac{R + S\omega^2}{L^2} \text{ est négligeable devant } \frac{1}{CL}$$

on a

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \tag{109}$$

et la période est

$$T = 2\pi\sqrt{CL}. \tag{110}$$

Le coefficient d'amortissement est

$$\alpha = \frac{R + S\omega^2}{2L} \tag{111}$$

et le décrément logarithmique d'amortissement, ou logarithme du rapport de deux maxima successifs de même sens, a pour valeur

$$S = \alpha T = \frac{(R + S\omega^2)T}{2L} = \frac{R + S\omega^2}{2nL}. \tag{112}$$

Il est la somme de deux autres

$$\delta_j = \frac{R}{2nL} \tag{113}$$

dû à la perte d'énergie par chaleur, et

$$\delta_r = \frac{S\omega^2}{2nL} \tag{114}$$

dû à la perte d'énergie par rayonnement.

On déduit des considérations précédentes que le premier membre de l'équation (99) est équivalent, avec les hypothèses faites ; à

$$\frac{1}{C}\mathfrak{Q} + (R + S\omega^2)\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2}$$

qui représente la somme des différences de potentiel, à l'instant t dans un circuit dont la capacité serait C, la self-induction L et la résistance $R + S\omega^2$.

Décharge oscillante. — *53.* Supposons l'oscillateur primitivement chargé d'une quantité d'électricité Q_0, au potentiel V_0

$$Q_0 = CV_0$$

et abandonné ensuite à lui-même, les deux moitiés étant réunies par un conducteur. Il se décharge avec oscillations amorties de la forme.

$$\mathfrak{Q} = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \psi)$$

α et ω ayant des valeurs (107)

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{R + S\omega^2}{2L} \\ \omega = \dfrac{1}{\sqrt{CL}}. \end{cases}$$

Au temps $t = 0$, la charge $\mathfrak{Q}$ est égale à Q_0 et le courant $\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}$ est nul. Ces conditions vont nous servir à déterminer les constantes A et ψ.

Elles s'écrivent

$$\begin{cases} Q_0 = A\cos\psi \\ O = A(\alpha\cos\psi + \omega\sin\psi) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} A = \dfrac{Q_0}{\cos\psi} \\ \psi = -\chi \end{cases}$$

en posant

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\alpha}{\omega}.$$

On a ainsi pour $\mathcal{Q}$ l'expression

$$\mathcal{Q} = \frac{Q_0}{\cos\chi} e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \chi)$$

d'où pour la différence de potentiel entre les deux armatures

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{Q}}{C} = \frac{Q_0}{C} \frac{1}{\cos\chi} e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \chi)$$

$$\mathcal{V} = \frac{V_0}{\cos\chi} e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \chi)$$

et pour le courant :

$$\mathcal{J} = \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = -Q_0 \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

Avec l'approximation admise (α^2 négligeable devant ω^2)

$$\cos\chi = 1, \quad \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} = \omega$$

et l'on peut écrire :

$$\mathcal{Q} = Q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \chi)$$
$$\mathcal{V} = V_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \chi)$$
$$\mathcal{J} = -Q_0 \omega e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

II. — Le problème de la réception [b]

54. Considérons un oscillateur de longueur $2\,l$, possédant une capacité C, une self L et une résistance R, placé dans un champ électromagnétique alternatif d'intensité $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$. Nous supposons la longueur d'onde du champ électromagnétique grande par rapport à celle du conducteur, de telle sorte qu'on puisse considérer l'intensité du courant comme la même tout le long de celui-ci.

Energie absorbée. — *55*. La force électromotrice est

$$\mathcal{E} \,.\, 2l \cos\alpha$$

α étant l'angle que fait la direction de l'élément ds avec celle du champ $\mathcal{E}$.

La puissance fournie au conducteur par le champ dû à l'excitateur est

$$P = 2\,l\,\mathcal{E}\mathcal{J} \cos\alpha = 2\,l\,\mathcal{E} \frac{d\mathcal{Q}}{dt} \cos\alpha$$

$\mathcal{J}$ et $\mathcal{Q}$ représentant à chaque instant le courant et la charge du récepteur.

Equation différentielle du phénomène. — *56.* Nous obtiendrons l'équation différentielle du phénomène en écrivant que la puissance absorbée est égale à la puissance dépensée, laquelle est (§ 38, équation 61)

$$P = \frac{1}{C} \mathfrak{Q} \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + R \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2} \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} - S \frac{d^3\mathfrak{Q}}{dt^3} \frac{d\mathfrak{Q}}{dt}$$

et l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{1}{C} \mathfrak{Q} \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + R \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} \cdot \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2} \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} - S \frac{d^3\mathfrak{Q}}{dt^3} \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} - 2\mathcal{E}l \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} \cos \alpha = 0 \qquad (121)$$

ou, en divisant les deux membres par $\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}$

$$\frac{1}{C} \mathfrak{Q} + R \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2} - S \frac{d^3\mathfrak{Q}}{dt^3} - 2\mathcal{E}l \cos \alpha = 0 \qquad (122)$$

on a vu d'ailleurs que, si la longueur de l'oscillateur est très petite par rapport à la longueur d'onde, et qu'on ait en même temps

$$\left(\frac{R + S\omega^2}{2L}\right)^2 \text{ très petit par rapport à } \frac{1}{CL} \qquad (123)$$

$$\left(\omega^2 = \frac{1}{CL}\right) \qquad (124)$$

cette équation est équivalente à la suivante :

$$\frac{1}{C} \mathfrak{Q} + (R + S\omega^2) \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2} - 2\mathcal{E}l \cos \alpha = 0. \qquad (125)$$

Cas où le champ incident est sinusoïdal. — *57.* Nous écrirons dans ce cas

$$\mathcal{E} = E \sin \omega t \qquad (126)$$

et l'équation différentielle devient

$$\frac{1}{C} \mathfrak{Q} + R \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + L \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2} - S \frac{d^3\mathfrak{Q}}{dt^3} - 2\mathcal{E}l \cos \alpha \sin \omega t = 0. \qquad (127)$$

Cette équation est de la même forme que l'équation (63). Elle se résout de la même façon. La solution est

$$\mathfrak{Q} = - \frac{2El \cos \alpha}{\omega \sqrt{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos (\omega t - \gamma) \qquad (128)$$

en posant

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + S\omega^2}. \qquad (129)$$

On en déduit

$$\mathcal{I} = \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \frac{2El \cos \alpha}{\sqrt{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t - \gamma) \tag{130}$$

$$I_{eff} = \frac{E_{eff} \, . \, 2l \, . \cos \alpha}{\sqrt{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \tag{131}$$

La puissance moyenne P_j absorbée par l'oscillateur est

$$P_{j \text{ moy}} = RI_{eff}^2 = R \frac{E_{eff}^2 . 4l^2 . \cos^2\alpha}{\sqrt{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

La puissance moyenne rayonnée est

$$P_{r\text{moy}} = S\omega^2 I_{eff}^2 = S\omega^2 \frac{E_{eff}^2 . 4l^2 . \cos^2\alpha}{\sqrt{(R + S\omega^2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

La somme des puissances moyennes rayonnée et absorbée par l'oscillateur est égale à la puissance moyenne empruntée au champ incident.

Nous décomposerons la résistance en deux parties, celle R_p qui provoque des pertes d'énergie sous forme de chaleur dans l'antenne et la prise de terre, et celle R_u qui correspond à l'énergie utilisée pour la réception.

La puissance moyenne P_u utilisée pour la réception est

$$P_{u \text{ moy}} = R_u I_{eff}^2. \tag{132}$$

La puissance moyenne P_p perdue en chaleur et en rayonnement est

$$P_{p \text{ moy}} = (R_p + S\omega^2) I_{eff}^2 = T I_{eff}^2$$

en posant

$$T = R_p + S\omega^2. \tag{133}$$

Le rendement de l'oscillateur de réception, ou rapport de l'énergie transmise au détecteur à l'énergie empruntée au champ incident est

$$\eta = \frac{P_{u \text{ moy}}}{P_{p \text{ moy}}} = \frac{R_u}{R_u + T} \tag{134}$$

Discussion. Résonance. — L'énergie utile absorbée et l'énergie perdue sont maxima quand

$$L\omega - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{135}$$

c'est-à-dire quand il y a résonance entre les deux systèmes de trans-

mission et de réception. La pulsation ω des ondes transmises est alors égale à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ des oscillations propres du récepteur. Les expressions précédentes deviennent dans ce cas particulier :

$$I_{eff} = \frac{2E_{eff}l}{R_u + T} \cos \alpha \tag{136}$$

$$P_{u\,moy} = R_u \frac{E_{eff}^2 (2l)^2}{(R_u + T)^2} \cos^2 \alpha \tag{137}$$

$$P_{p\,moy} = T \frac{E_{eff}^2 (2l)^2}{(R_u + T)^2} \cos^2 \alpha. \tag{138}$$

Réception avec détecteur d'énergie.— *59.* Si l'appareil de réception est tel que sa réaction soit proportionnelle à l'énergie reçue, il mesure l'énergie $P_{u\,moy}$. Dans ce cas, l'action est évidemment d'autant plus intense que la résistance de l'antenne est plus faible par rapport à celle du détecteur.

La puissance utilisable $P_{u\,moy}$ est maxima quand la résistance ohmique totale R_u est égale à la résistance de pertes T.

Le courant utile a alors pour amplitude

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}\, 2l}{2R_u} \cos \alpha \tag{139}$$

et la puissance utile est

$$P_{u\,moy} = \frac{E_{eff}^2 (2l)^2}{4R_u} \cos^2 \alpha = \frac{E_{eff}^2 (2l)^2}{4T} \cos^2 \alpha. \tag{140}$$

Si l'énergie perdue sous forme de chaleur est négligeable par rapport à l'énergie rayonnée (R_p négligeable devant $S\omega^2$).

$$P_{u\,moy} = P_{j\,moy}$$
$$P_{p\,moy} = P_{r\,moy}$$
$$T = S\omega^2$$
$$R = R_u$$

et l'on a

$$P_{u\,moy} = P_{j\,moy} = \frac{E_{eff}^2 (2l^2) \cos^2 \alpha}{4R} = \frac{E_{eff}^2 (2l)^2 \cos^2 \alpha}{4S\omega^2}$$

ou, en tenant compte des valeurs de S et de ω

$$S = \frac{2}{3} (2l)^2 \sqrt{\varepsilon\mu}.\mu \qquad \omega = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{141}$$

$$P_{u\,moy} = \frac{3}{36\pi^2} E_{eff}^2 \lambda^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos^2 \alpha. \tag{141}$$

C'est la quantité maxima d'énergie qui puisse être enlevée à un champ

incident. On voit que, dans ce cas, l'énergie utilisable est égale à l'énergie rayonnée.

Il résulte de ce qui précède que, dans le cas où les pertes sous forme de chaleur sont négligeables, la quantité d'énergie utilisable maxima est d'autant plus grande que la longueur des ondes incidentes est plus grande. La longueur du conducteur de réception n'a aucune influence sur l'intensité de la réception.

60. — Le rendement de l'antenne réceptrice est, dans les conditions optima

$$\eta = \frac{R_u}{R_u + T} = \frac{1}{2}. \qquad (142)$$

Si la résistance du détecteur est grande par rapport aux résistances de pertes (cas des grandes longueurs d'ondes) la quantité d'énergie utilisable est

$$P_{u\,moy} = \frac{E_{eff}^2 (2l)^2}{R_u} \cos^2 \alpha \qquad (143)$$

et le rendement de l'antenne est voisin de 1.

61. Si la résistance du détecteur supposé inséré dans l'antenne est petite par rapport aux résistances de pertes T (cas qui ne se présenterait que pour des dispositifs de réception équivalant à une très faible résistance dans l'antenne, et pour de courtes longueurs d'ondes), on a

$$P_{u\,moy} = \frac{R_u E_{eff}^2 (2l)^2}{T^2} \cos^2 \alpha \qquad (144)$$

et le rendement serait très petit et égal à $\frac{R_u}{T}$.

Réception avec un détecteur de tension. — *62.* Dans ce cas, le facteur intéressant est la différence de potentiel

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{Q}}{C} = \frac{2El\cos\alpha}{C\omega(R + S\omega^2)} \sin(\omega t - \gamma). \qquad (145)$$

Ici encore la résistance ohmique doit être aussi petite que possible, et les grandes longueurs d'ondes sont favorables à la réception.

L'amplitude de la tension :

$$V = \frac{2El\cos\alpha}{C\omega(R + S\omega^2)} = \frac{2El\cos\alpha}{C\omega\left[R + \frac{2}{3}(2l)^2\sqrt{\varepsilon\mu}\,.\,\mu\,.\,\frac{4\pi^2}{\lambda^2\varepsilon\mu}\right]} \qquad (146)$$

$$= \frac{2El\cos\alpha}{C\omega\left[R + \frac{8}{3}\frac{\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(2l)^2\right]} \qquad (147)$$

est maxima quand $\frac{dV}{dl}$ est nul, ou, si $\cos\alpha = 1$,

$$\frac{dV}{dl} = \frac{2E}{C\omega}\left[\frac{R - \frac{8}{3}\frac{\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(2l)^2}{R + \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(2l)^2}\right] = 0 \tag{148}$$

ou

$$R = \frac{8}{3}\frac{\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(2l)^2 \tag{149}$$

d'où l'on tire

$$2l = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}\cdot\frac{3}{8}R}. \tag{150}$$

Cette expression représente la longueur la plus favorable de l'oscillateur de réception.

Cas où le champ incident est périodique amorti. — *63.* Soit

$$\mathcal{E} = Ee^{-\alpha_e t}\sin(\omega_e t + \psi) \tag{151}$$

le champ incident, dont α_e est le coefficient d'amortissement, et ω_e la pulsation.

Soient, d'autre part, α_ρ et ω_ρ les grandeurs correspondantes pour les oscillations propres du récepteur. Nous avons vu que, dans le cas où α_ρ^2 est négligeable par rapport à ω_ρ^2,

$$\alpha_\rho = \frac{R + S\omega_\rho^2}{2L} \tag{152}$$

$$\omega_\rho = \frac{1}{\sqrt{CL}}. \tag{153}$$

Dans ce cas, l'équation différentielle du phénomène s'écrit :

$$\frac{1}{C}\mathcal{Q} + (R + S\omega_\rho^2)\frac{d\mathcal{Q}}{dt} + L\frac{d^2\mathcal{Q}}{dt^2} - E \times 2l \times e^{-\alpha_e t}\sin(\omega_e t + \psi)\cos\alpha = 0 \tag{154}$$

Nous avons trouvé plus haut (§ 45), la solution de l'équation sans second membre : elle est de la forme

$$\mathcal{Q}_1 = e^{-\alpha_\rho t}(A_1 \sin\omega_\rho t + A_2\cos\omega_\rho t). \tag{155}$$

Soit d'ailleurs $\mathcal{Q}_2$ une solution particulière de l'équation différentielle

$$\mathcal{Q}_2 = e^{-\alpha_e t}(B_1\sin\omega_e t + B_2\cos\omega_e t) \tag{156}$$

la solution générale est :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2. \tag{157}$$

On détermine les valeurs de A_1 et A_2 en substituant cette valeur de $\mathfrak{Q}$ dans l'équation différentielle. On tire ensuite B_1 et B_2 des conditions initiales

$$t = 0 \qquad \mathfrak{Q} = 0 \qquad \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} = 0. \tag{158}$$

Nous supposerons dans ce qui suit les amortissements assez petits pour qu'on puisse écrire

$$\alpha^2 \quad \text{et} \quad \alpha_\rho^2 \quad \text{négligeables devant } \omega_\varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \omega_\rho^2. \tag{159}$$

Nous supposons de plus

$$(\omega_\varepsilon - \omega_\rho)^2 \text{ négligeable par rapport à } 4\omega_\varepsilon^2 \quad \text{et} \quad 4\omega_\rho^2. \tag{160}$$

Nous utiliserons les symboles suivants

$$m = \frac{\omega_\varepsilon + \omega_\rho}{2} \qquad n = \frac{\omega_\varepsilon - \omega_\rho}{2} \qquad \mu = \frac{\alpha_\varepsilon + \alpha_\rho}{2} \qquad \nu = \frac{\alpha_\varepsilon - \alpha_\rho}{2}. \tag{161}$$

ω_ε étant très voisin de ω_ρ nous pouvons, en employant un procédé donné par Bjerknes (7) dans l'étude de la résonance électrique entre systèmes couplés, dans le cas d'un couplage très lâche (procédé que nous retrouverons d'ailleurs dans un volume suivant), remplacer l'expression (157) par une autre de la forme :

$$\mathfrak{Q} = M \sin (mt + m'). \tag{162}$$

L'oscillation est ainsi mise sous la forme d'une oscillation unique, dont la période est la moyenne de celles du récepteur et du champ incident. L'amplitude M et la phase m' sont fonctions du temps.

On trouve, en négligeant, comme nous l'avons convenu, μ^2, ν^2, n^2, devant m^2

$$M^2 = \frac{E^2 \cdot 4\, l^2 \cos^2 \alpha}{16\, L^2\, m^2\, (n^2 + \nu^2)} \left\{ T_1 + 2\, \frac{1 + 2\cos\psi}{m}\, T_2 + 2\, \frac{\sin 2\psi}{m}\, T_3 \right\} \tag{163}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} T_1 &= e^{-2\mu t} \left\{ e^{-2\nu t} + e^{2\nu t} - 2\cos 2nt \right\} \\ T_2 &= e^{-2\mu t} \left\{ n e^{2\nu t} - n\cos 2nt - \nu \sin 2nt \right\} \\ T_3 &= e^{-2\mu t} \left\{ \nu e^{2\nu t} - \nu \cos 2nt + n \sin 2nt \right\} \end{aligned} \right. \tag{164}$$

Dans le cas, particulièrement simple, où l'on suppose $\psi = \frac{\pi}{2}$, T_2 et T_3 disparaissent, et l'on a

$$M = \pm \frac{E \cdot 2\, l \cos \alpha}{4 L m \sqrt{n^2 + \nu^2}}\, e^{-\mu t} \left\{ \left(e^{-\nu t} - e^{\nu t}\right) \cos nt + \left(e^{-\nu t} + e^{\nu t}\right) \sin nt \right\} \tag{165}$$

57. Pour nous faire une idée des oscillations du récepteur, nous dessinerons les courbes des oscillations (fig. 83).

1° *Si les périodes propres et les amortissements propres du récepteur et du champ incident sont les mêmes*

$$n = \nu = 0$$

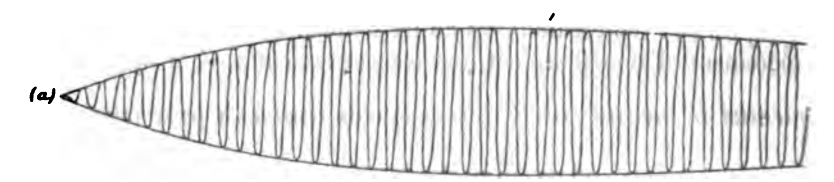
$$M = \pm \frac{E \cdot 2l \cos \alpha}{2Lm} t e^{-\mu t}. \qquad (166)$$

Les figures (83_a) et (83_c) représentent les oscillations dans les cas où les décréments logarithmiques d'amortissement ont les valeurs suivantes

$$\delta_e = \delta_\rho = 0{,}04 \text{ (courbe } a)$$

et

$$\delta_e = \delta_\rho = 0{,}4 \text{ (courbe } c).$$



(b)

(c)

(a)

(b)

(c)

Fig. 83

2° *Si les périodes sont les mêmes, mais que les amortissements diffèrent*

$$n = 0 \qquad \nu \neq 0$$

$$M = \pm \frac{E \cdot 2l \cos \alpha}{4Lm\nu} e^{-\mu t} \left(e^{-\nu t} - e^{\nu t}\right). \qquad (167)$$

La figure (83_b) représente l'oscillation pour

$$\delta_e = 0{,}04 \qquad \delta_\rho = 0{,}4$$

ou

$$\delta_e = 0{,}4 \qquad \delta_\rho = 0{,}04.$$

On obtient ainsi une courbe intermédiaire entre les courbes (a) et (c).

3° *Si les périodes diffèrent, mais que les amortissements soient les mêmes*

$$n \neq 0 \qquad \nu = 0$$

$$M = \pm \frac{E \cdot 2l \cos \alpha}{2Lmn} e^{-\mu t} \sin nt \tag{168}$$

la courbe en M est oscillante et amortie : l'oscillation présente des battements.

Les figures $83_{a'}$ et $83_{c'}$ représentent les cas où les fréquences diffèrent de 10 % et où les décréments logarithmiques d'amortissement ont les valeurs suivantes :

$$\delta_s = \delta_\rho = 0{,}04 \text{ (courbe } a'\text{)}$$
$$\delta_s = \delta_\rho = 0{,}4 \text{ (courbe } c'\text{)}$$

4° *Si les périodes et les amortissements diffèrent*, M a la valeur (165).

La figure $83_{b'}$ représente le cas où les fréquences diffèrent de 10 % et où les décréments d'amortissement sont respectivement 0,04 et 0,4.

Intensité du courant. — *64.* L'intensité du courant a pour valeur

$$\mathfrak{I} = \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} = Mm \cos (mt + m'). \tag{169}$$

L'amplitude du courant est donc, abstraction faite du facteur m, égale à celle de la différence de potentiel.

Les oscillations du courant sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à celles de la différence de potentiel.

Supposons le courant mesuré par un procédé thermique ou électrodynamique, l'appareil donne une indication proportionnelle au carré de l'intensité efficace, soit à

$$I^2_{eff} = \frac{1}{t} \int_0^t \left[Mm \cos (mt + m')\right]^2 dt \tag{170}$$

On supposera que l'oscillation amortie est regénérée à intervalles réguliers d'une durée égale à τ, et a le temps de s'amortir complètement pendant le temps τ. Alors, si t est supérieur à τ, on a

$$\int_0^\tau \left[Mm \cos (mt + m')\right]^2 d\tau = \int_0^t \left[Mm \cos (mt + m')\right]^2 dt$$
$$= \int_0^\infty \left[Mm \cos (mt + m')\right]^2 dt$$

et

$$I^2_{eff} = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty \left[Mm \cos (mt + m')\right]^2 dt \tag{171}$$

$$I^2_{eff} = N \int_0^\infty \left[Mm \cos (mt + m')^2\right] dt \tag{172}$$

N étant le nombre de trains d'oscillations par unité de temps.

A des termes du 2° ordre près, le deuxième terme du 2° membre de cette expression est sinusoïdal, et son intégrale est nulle. Il reste donc

$$I_{eff}^2 = \frac{N}{2} m^2 \int_0^{\infty} M^2 dt \qquad (173)$$

On trouve ainsi

$$I_{eff}^2 = \frac{NE^2 \cdot 4 l^2 \mu \cos^2 \alpha}{32 L^2 (\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 + \nu^2)}. \qquad (174)$$

(Si ψ est différent de zéro, il faut multiplier par le terme de correction suivant :

$$1 + \frac{\mu + \nu}{m} \sin 2\psi + \frac{\mu + \nu}{\mu} \frac{n}{m} (1 + \cos 2\psi)\Big) \qquad (175)$$

ou

$$I_{eff}^2 = \frac{NE^2 \cdot 4 l^2 (\alpha_s + \alpha_p) \cos^2 \alpha}{16 L^2 \alpha_s \alpha_p \left\{ (\omega_s - \omega_p)^2 + (\alpha_s + \alpha_p)^2 \right\}}. \qquad (176)$$

Dans le cas de l'isochronisme

$$\omega_s = \omega_p = \omega$$

$$I_{eff}^2 = \frac{NE^2 \cdot 4 l^2 \cos^2 \alpha}{16 L^2 \alpha_s \alpha_p (\alpha_s + \alpha_p)}$$

ou, en tenant compte de

$$\alpha_p = \frac{R + S\omega^2}{2L}$$

$$I_{eff} = \frac{NE^2 \cdot 4 l^2 \cos^2 \alpha}{4 (R + S\omega^2)^2 \cdot \alpha_s \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_p}\right)}$$

$$I_{eff} = \frac{\sqrt{N} E \cdot 2 l \cos \alpha}{2 (R + S\omega^2) \sqrt{\alpha_s \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_p}\right)}} \qquad (177)$$

et comme (expression 39)

$$E_{eff}^2 = \frac{NE^2}{4 \delta_s} \lambda \sqrt{\varepsilon\mu}$$

ou

$$E^2 = E_{eff}^2 \frac{4\delta_s}{N} \frac{1}{\lambda \sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{4 E_{eff}^2}{N} \frac{\alpha_s \lambda \sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda \sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{4 E_{eff}^2 \alpha_s}{N}$$

$$I_{eff}^2 = \frac{N \cdot 4 E_{eff}^2 \cdot \alpha_s 4 l^2 \cdot \cos^2 \alpha}{4 (R + S\omega^2)^2 N \alpha_s \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_p}\right)} = \frac{E_{eff}^2 \cdot 4 l^2 \cos^2 \alpha}{(R + S\omega^2)^2 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_p}\right)}$$

$$I_{eff} = \frac{E_{eff} \cdot 2 l \cos \alpha}{(R + S\omega^2) \sqrt{1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_p}}}.$$

Réception avec un détecteur d'énergie. — Dans ce cas l'énergie utilisable est d'autant plus grande que le terme

$$P_{u\ moy} \doteq R_u I^2_{eff} = \frac{R_u}{(R_u + T)^2} \frac{E^2_{eff} \cdot 4 l^2 \cos^2 \alpha}{\left(1 + \frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}\right)}$$

est lui-même plus grand.

Mais on a, en posant

$$\alpha_\rho = \frac{R_u + T}{2 L}$$

$$P_{u\ moy} = \frac{R_u}{(R_u + T)^2} \frac{E^2_{eff} \cdot 4 l^2 \cos^2 \alpha}{1 + \frac{\alpha_\varepsilon\ 2 L}{R + T}} = \frac{E^2_{eff} \cdot 4 l^2 \cos^2 \alpha \cdot R_u}{(R + T)(R + T + 2 L \alpha_\varepsilon)}$$

et cette quantité est maxima quand

$$\frac{dP_{u\ moy}}{dR_u} = 0,$$

c'est-à-dire quand

$$(R_u + T)^2 + (R + T)\, 2 L \alpha_\varepsilon - R_u \left[2 (R_u + T) + 2 L \alpha_\varepsilon\right] = 0$$

ou

$$R_u^2 = T^2 \left(1 + \alpha_\varepsilon \cdot \frac{2 L}{T}\right)$$

ou

$$R_u^2 = T^2 \left(1 + \frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}\right)$$

α étant le coefficient d'amortissement qui correspond aux pertes par rayonnement et chaleur dans l'antenne de réception

ou enfin

$$R = T \sqrt{1 + \frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}}$$

$$= T \sqrt{1 + \frac{\delta_\varepsilon}{\delta_\rho}}.$$

On voit que, si le décrément d'amortissement des ondes émises est égal au décrément de pertes dans l'antenne de réception, comme dans le cas où l'on emploie à l'émission la méthode d'excitation par impulsion, et où les antennes de réception et d'émission sont identiques, la valeur optima de la résistance du détecteur (ou résistance équivalente) est

$$R = T \sqrt{2}.$$

La valeur optima de cette résistance est d'ailleurs d'autant plus

grande que l'amortissement des ondes émises est plus grand et que l'amortissement dû aux pertes à la réception est plus petit.

III. — Radiocommunications par oscillateurs ouverts

Cas des oscillations entretenues. — *65.* Considérons deux oscillateurs hertziens $A_\varepsilon B_\varepsilon$, $A_\rho B_\rho$, servant, le premier d'appareil d'émission ; le deuxième, d'appareil de réception.

Soient $O_\varepsilon O_\rho$ la distance des deux oscillateurs, supposée grande par rapport à leurs dimensions linéaires, et φ l'angle de $O_\varepsilon O_\rho$ avec le plan équatorial de l'oscillateur d'émission. Soit α l'angle de l'oscillateur de réception avec la perpendiculaire à $O_\varepsilon O_\rho$ tracée dans le plan $A_\varepsilon O_\varepsilon O_\rho$ (fig. 84).

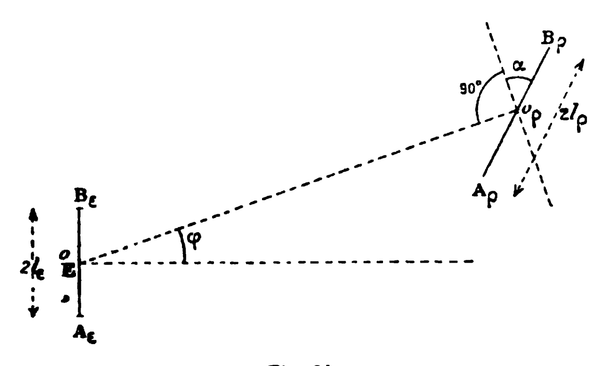


Fig. 84

Soient $2\,l_\varepsilon$ et $2\,l_\rho$ les longueurs des deux éléments de courant.

Nous affecterons de l'indice ε tous les symboles se rapportant à l'oscillateur d'émission ; de l'indice ρ tous ceux qui concernent l'oscillateur d'émission.

Nous examinerons ici uniquement le cas des oscillateurs non amorties.

Résultats relatifs à l'oscillateur d'émission. Champ à grande distance de l'oscillateur. — *66.* La force électrique $\mathcal{E}_\rho$ au point O_ρ est perpendiculaire à la droite $O_\varepsilon O_\rho$ et située dans le plan $A_\varepsilon O_\varepsilon O_\rho$.

La force magnétique $\mathcal{M}_\rho$ est perpendiculaire au plan $A_\varepsilon O_\varepsilon O_\rho$.

Leurs valeurs efficaces ont pour expression (Equation 23)

$$\begin{cases} E_{\rho\,\text{eff}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, \dfrac{2l}{\lambda}\, \dfrac{1}{r}\, I_{\varepsilon\,\text{eff}} \cos\varphi & (178) \\ M_{\rho\,\text{eff}} = 2\pi\, \dfrac{2l_\varepsilon}{\lambda}\, \dfrac{1}{r}\, I_{\varepsilon\,\text{eff}} \cos\varphi & (179) \end{cases}$$

λ étant la longueur d'onde, r la distance $O_\varepsilon O_\rho$, et $I_{\varepsilon\,eff}$ le courant efficace dans l'oscillateur d'émission.

Rendement de l'oscillateur d'émission. Puissance moyenne dépensée dans l'oscillateur d'émission. — *67*. La puissance moyenne dépensée dans l'oscillateur d'émission a pour expression : (équation 87)

$$P_{\varepsilon\,moy} = (R_\varepsilon + S_\varepsilon\omega^2)\, I_{eff}^2 \tag{180}$$

R_ε étant la résistance et S_ε le coefficient de rayonnement de l'oscillateur d'émission.

Avec (Expression 74)

$$S_\varepsilon = \frac{2}{3}(2\,l_\varepsilon)^2 \sqrt{\varepsilon\mu}.\ \mu. \tag{181}$$

Puissance moyenne rayonnée (Expression 86)

$$P_{\varepsilon_r\,moy} = S_\varepsilon\omega^2\, I_{\varepsilon eff}^2. \tag{182}$$

Rendement de l'oscillateur d'émission (Expression 88)

$$\eta_\varepsilon = \frac{P_{\varepsilon_r\,moy}}{P_{\varepsilon\,moy}} = \frac{S_\varepsilon\omega^2}{R + S_\varepsilon\omega^2}. \tag{183}$$

Cas particulier où R_ε *est grand par rapport à* $S_\varepsilon\omega^2$. — *68*. Alors

$$P_{\varepsilon\,moy} = R_\varepsilon I^2_{\varepsilon eff} \tag{184}$$

$$P_{\varepsilon_r\,moy} = S_\varepsilon\omega^2 I_{\varepsilon\,eff}^2 \tag{185}$$

$$\eta_\varepsilon = \frac{S_\varepsilon\omega^2}{R_\varepsilon}. \tag{186}$$

Cas où R_ε *est petit devant* $S_\varepsilon\omega^2$. — *69*.

$$P_{\varepsilon\,moy} = S_\varepsilon\omega^2 I_{\varepsilon\,eff}^2 \tag{187}$$

$$P_{\varepsilon_r\,moy} = S_\varepsilon\omega^2 I_{\varepsilon\,eff}^2 \tag{188}$$

$$\eta_\varepsilon = 1. \tag{189}$$

Cas de l'énergie rayonnée maxima. — *70*. Alors on a, d'après l'expression (95)

$$P_{\varepsilon\,moy} = 2\,RI_{eff}^2 = 2\,S_\varepsilon\omega^2 I_{eff}^2 \tag{190}$$

$$P_{\varepsilon_r\,moy} = RI_{eff}^2 = S_\varepsilon\omega^2 I_{eff}^2 \tag{191}$$

ou, en tenant compte de la valeur de S_ε

$$P_{\varepsilon\,moy} = \frac{16}{3}\pi^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{2\,l_\varepsilon}{\lambda}\right)^2 .\ I_{\varepsilon\,eff}^2 \tag{192}$$

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{2}. \tag{193}$$

Résultats relatifs à l'oscillateur de réception. Courant efficace dans l'oscillateur de réception. — *71*. On a, dans le cas général (Equation 131)

$$I_{\rho\,\text{eff}} = \frac{E_{\rho\,\text{eff}} \cdot 2\,l_\rho \cdot \cos\alpha}{\sqrt{(R_\rho + S_\rho\omega^2)^2 + \left(L_\rho\omega - \frac{1}{C_\rho\omega}\right)^2}} \tag{194}$$

et, dans le cas de la résonance (Equation 137)

$$I_{\rho\,\text{eff}} = \frac{E_{\rho\,\text{eff}} \cdot 2\,l_\rho \cdot \cos\alpha}{R_\rho + S_\rho\omega^2}. \tag{195}$$

Nous supposons toujours, dans ce qui suit, que la résonance est établie.

En combinant les expressions (195) et (178) on obtient l'expression du courant dans l'oscillateur de réception en fonction du courant dans l'oscillateur d'émission et des coustantes des appareils :

$$I_{\rho\,\text{eff}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{2\,l_\varepsilon \cdot 2\,l_\rho}{R_\rho + S_\rho\omega^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2}\,I_{\varepsilon\,\text{eff}} \cdot \cos\varphi\cos\alpha. \tag{196}$$

Puissance captée par le récepteur. Puissance utilisée. Rendement. *Expressions générales.* — *72*. La puissance moyenne soustraite au champ de l'oscillateur d'émission a pour expression :

$$P_{\rho\,\text{moy}} = (R_\rho + S_\rho\omega^2)\,I^2_{\rho\,\text{eff}}. \tag{197}$$

La puissance moyenne utilisable est

$$P_{\rho u\,\text{moy}} = R_{\rho u} I^2_{\rho\,\text{eff}}. \tag{198}$$

En substitùant la valeur (132) de $I_{\rho\,\text{eff}}$ dans les expressions précédentes on obtient :

$$P_{\rho\,\text{moy}} = 4\pi^2\,\frac{\mu}{\varepsilon}\,\frac{(2\,l_\varepsilon)^2\,(2\,l_\rho)^2}{R_{\rho u} + T_\rho} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2}\,I^2_{\varepsilon\,\text{eff}}\cos^2\varphi\cos^2\alpha \tag{199}$$

$$P_{\rho u\,\text{moy}} = \frac{R_{\rho u}}{R_{\rho u} + T_\rho} \cdot 4\pi^2\,\frac{\mu}{\varepsilon}\,\frac{(2\,l_\varepsilon)^2\,(2\,l_\rho)^2}{R_{\rho u} + T_\rho} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2}\,I^2_{\varepsilon\,\text{eff}}\cos^2\varphi\cos^2\alpha. \tag{200}$$

Le rendement η_ρ de l'antenne de réception a pour expression :

$$\eta_\rho = \frac{R_{\rho u}}{R_{\rho u} + T_\rho}.$$

Cas où la résistance utile est grande par rapport à la résistance T *de pertes*. — *73*. ($R_{\rho u}$ grand par rapport à T).

Alors

$$P_{\rho\,\text{moy}} = P_{\rho u\,\text{moy}} = 4\pi^2\,\frac{\mu}{\varepsilon}\,\frac{(2\,l_\varepsilon)^2\,(2\,l_\rho)^2}{R_{\rho u}} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2}\,I^2_{\varepsilon\,\text{eff}}\cos^2\varphi\cos^2\alpha \tag{201}$$

$$\eta = 1. \tag{202}$$

Cas où la résistance utile est petite par rapport aux résistances de pertes. — *74.* ($R_{\rho u}$ petit devant T).

Alors

$$P_{\rho \text{ moy}} = 4\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{(2\,l_\varepsilon)^2\,(2\,l_\rho)^2}{T_\rho} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2}\, I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \cos^2\varphi \cos^2\alpha$$

$$P_{\rho u \text{ moy}} = \frac{R_{\rho u}}{T_\rho} \cdot 4\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{(2\,l_\varepsilon)^2\,(2\,l_\rho)^2}{T_\rho} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2}\, I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \cos^2\varphi \cos^2\alpha$$

$$\eta = \frac{R_{\rho u}}{T_\rho}.$$

Si les pertes sous forme de chaleur sont négligeables par rapport à l'énergie utilisée

$$P_{\rho u \text{ moy}} = P_{\rho j \text{ moy}} \qquad R_\rho = R_{\rho u}$$
$$P_{\rho \rho \text{ moy}} = P_{\rho r \text{ moy}} \qquad T_\rho = S_\rho \omega^2$$

ou, en remplaçant S_ρ et ω par leurs valeurs

$$S_\rho = \frac{2}{3}(2\,l_\varepsilon)^2 \sqrt{\varepsilon\mu}\ \mu$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$P_{\rho \text{ moy}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,(2\,l_\varepsilon)^2 \cdot \frac{1}{r^2}\, I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \cos^2\varphi \cos^2\alpha \tag{203}$$

$$P_{\rho j \text{ moy}} = R_\rho \cdot \frac{9}{16\pi^2} \frac{(2\,l_\varepsilon)^2\,\lambda^2}{(2\,l_\rho)^2\,r^2}\, I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \cos^2\varphi \cos^2\alpha \tag{204}$$

$$\eta = \frac{R_\rho}{S_\rho \omega^2} = \frac{3}{8\pi^2} R_\rho \cdot \frac{\lambda^2}{(2\,l_\rho)^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \tag{205}$$

Cas de l'énergie utilisée maxima. — *75.* On a, dans ce cas

$$R_{\rho u} = T_\rho \qquad \eta_\rho = \frac{1}{2} \tag{206}$$

et, si les pertes sous forme de chaleur sont négligeables par rapport à l'énergie utile :

$$P_{\rho \text{ moy}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,(2\,l_\varepsilon)^2 \frac{1}{r^2}\, I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \cos^2\varphi \cos^2\alpha \tag{207}$$

$$P_{\rho j \text{ moy}} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,(2\,l_\varepsilon)^2 \frac{1}{r^2}\, I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \cos^2\varphi \cos^2\alpha. \tag{208}$$

Rendement de la radiocommunication — *76.* On peut considérer les différents rendements suivants :

$$\left\{\begin{array}{l}
\eta_{\varepsilon}^{\rho} = \dfrac{P_{\rho\ moy}}{P_{\varepsilon\ moy}} = \dfrac{\text{Energie soustraite au champ émetteur}}{\text{Energie dépensée dans l'oscillateur d'émission}} \\[2ex]
\eta_{\varepsilon}^{\rho u} = \dfrac{P_{\rho u\ moy}}{P_{\varepsilon\ moy}} = \dfrac{\text{Energie utilisable à la réception}}{\text{Energie dépensée dans l'oscillateur d'émission}} \\[2ex]
\eta_{\varepsilon r}^{\rho} = \dfrac{P_{\rho\ moy}}{P_{\varepsilon r\ moy}} = \dfrac{\text{Energie soustraite au champ émetteur}}{\text{Energie rayonnée par l'émetteur}} \\[2ex]
\eta_{\varepsilon r}^{\rho u} = \dfrac{P_{\rho u\ moy}}{P_{\varepsilon r\ moy}} = \dfrac{\text{Energie utilisable à la réception}}{\text{Energie rayonnée par l'émetteur}}
\end{array}\right.$$

Pour avoir l'expression de ces rendements dans les différents cas envisagés ci-dessus, il faut prendre, pour chaque valeur du numérateur, successivement les valeurs du dénominateur correspondant aux cas étudiés. On obtient ainsi, pour les différents rendements, les valeurs portées dans les tableaux ci-dessous (Tableaux 1 et 2 hors texte).

Tous ces rendements sont *inversement proportionnels au carré de la distance des deux oscillateurs. Ils sont proportionnels à* $\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha$, *proportionnels au carré de la longueur des oscillateurs et inversement proportionnels à leurs résistances (résistances de rayonnement comprises). Ils varient en raison inverse du carré de la longueur d'onde quand la résistance est indépendante de celle-ci. (Cas des faibles résistances de rayonnement).*

Si au contraire on suppose les radiances grandes par rapport aux résistances, les rendements augmentent en même temps que la longueur d'onde.

Dans le cas où l'énergie émise et l'énergie captée sont maxima, ($R = S\omega^2$) *les rendements sont indépendants de la longueur des oscillateurs ; ils sont proportionnels au carré de la longueur d'onde.*

Portée de la radiocommunication. — *77.* Si $P_{\rho j\ moy}$ est la puissance nécessaire et suffisante pour que les signaux soient reçus, la portée est déterminée, connaissant la valeur, soit de la puissance totale dépensée, soit la puissance rayonnée par l'émetteur, par l'équation

$$\eta_{\varepsilon}^{\rho j} = \frac{P_{\rho j\ moy}}{P_{\varepsilon\ moy}} = K_{\varepsilon}^{\rho j} \frac{1}{r^2}$$

ou

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho j} = \frac{P_{\rho j\ moy}}{P_{\varepsilon r\ moy}} = K_{\varepsilon r}^{\rho j} \frac{1}{r^2}.$$

On a, par exemple, dans le cas où, pour les deux oscillateurs

$$R = S\omega^2 \qquad \cos\varphi = \cos\alpha = 1$$

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho j} = \frac{P_{\rho j \text{ moy}}}{P_{\varepsilon r \text{ moy}}} = \frac{9}{64\pi^2}\frac{\lambda^2}{r^2}$$

d'où

$$r = \frac{3}{8\pi}\lambda\sqrt{\frac{P_{\varepsilon r \text{ moy}}}{P_{\rho j \text{ moy}}}}.$$

Dans ce cas, qui est celui de la puissance maxima qui puisse être captée au champ émetteur, on voit que la portée de la radiocommunication est proportionnelle :

1° A la longueur d'onde émise ;

2° A la racine carrée de l'énergie rayonnée ou, ce qui revient au même, à l'intensité dans l'oscillateur de transmission ;

3° Elle est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'énergie nécessaire pour la réception des signaux.

Admettons par exemple pour valeur de W_r la puissance nécessaire pour provoquer une déviation de 80 millimètres du spot d'un thermogalvanomètre Duddell, l'échelle étant supposée placée à 1 mètre de l'instrument, c'est-à-dire

$$W_r = 4.10^{-6} \text{ watts.}$$

Le tableau suivant donne les portées correspondantes, en kilomètres pour différentes puissances rayonnées et différentes longueurs d'ondes.

	Longueurs d'ondes, en mètres						
		100	200	500	1 000	2 000	10 000
Puissance rayonnée en watts	1 000	188	376	940	1 880	3 760	18 800
	4 000	376	752	1 880	3 760	7 520	—
	9 000	564	1 128	2 820	5 640	11 280	—
	16 000	752	1 504	3 760	7 520	15 040	—

Si l'on admettait, comme puissance nécessaire pour la réception des signaux, celle qu'il faut pour une bonne réception au téléphone en télégraphie sans fil, soit 4.10^{-8} watts, les portées ci-dessus devraient être multipliées par 10.

Cas des oscillations amorties. — *78*. Nous supposons, ainsi que nous l'avons fait au § 24, que la quantité d'électricité en jeu dans l'oscillateur d'émission a pour valeur

$$Q_t = \frac{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\pi} I_t \, e^{-\frac{\delta}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi\right)\cos\chi. \qquad (209)$$

TRIQ

hamp

t à T_ρ

$\varphi \cos^2\varphi \cos^2\alpha$

$\cos^2\varphi \cos^2\alpha$

$s^2\varphi \cos^2\alpha$

$^2\varphi \cos^2\alpha$

$^2\varphi \cos^2\alpha$

$\varphi \cos^2\alpha$

RIQUE

r rapp

p émette

port à $S_p \omega^2$ $_{rr} \cos^2\varphi \cos^2\alpha$
$os^2\varphi \cos^2\alpha$
$os^2\varphi \cos^2\alpha$
$s^2\varphi \cos^2\alpha$
$os^2\varphi \cos^2\alpha$
$s^2\varphi \cos^2\alpha$

L'oscillateur d'émission est alors parcouru par un courant $\mathfrak{J}_\varepsilon$ (Expression (35)

$$\mathfrak{J}_\varepsilon = - I_\varepsilon e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi + \chi\right) \qquad (210)$$

en posant

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\delta_\varepsilon}{2\pi}.$$

On a d'ailleurs (Expression 39)

$$I_{\varepsilon\,\text{eff}} = \sqrt{N}\,\frac{I_\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}{\delta_\varepsilon}}$$

$$I_{\varepsilon\,\text{eff}} = \sqrt{N}\,\frac{I_\varepsilon}{2\sqrt{\alpha_\varepsilon}} \qquad (211)$$

en posant

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\delta_\varepsilon}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

α_ε est le coefficient d'amortissement de l'oscillateur.

Si, comme dans l'oscillateur de Hertz, les oscillations sont produites par la décharge, à travers une étincelle, des deux moitiés de l'oscillateur, on a :

$$\chi = -\psi \qquad (212)$$

$$Q_\varepsilon = \frac{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\pi} I_\varepsilon e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} - \chi\right)\cos\chi \qquad (213)$$

$$\mathfrak{J}_\varepsilon = - I_\varepsilon e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \sin\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (214)$$

Nous supposerons dans ce qui suit, que δ_ε^2 est négligeable par rapport à $4\pi^2$, ou, ce qui revient au même, χ^2 négligeable par rapport à l'unité.

Champ à grande distance de l'oscillateur d'émission. — *79.* On a, d'après les expressions (46)

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho &= -2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{2l_\varepsilon}{\lambda}\frac{1}{r} I_\varepsilon \frac{\cos\varphi}{\cos\chi} e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)+\psi+2\chi\right]\\
\mathcal{H}_\rho &= -2\pi\frac{2l_\varepsilon}{\lambda}\frac{1}{r} I_\varepsilon \frac{\cos\varphi}{\cos\chi} e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)+\psi+2\chi\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (215)$$

χ^2 étant négligeable par rapport à l'unité, $\cos\chi$ peut être regardé comme égal à un.

Dans le cas de la décharge oscillante de l'oscillateur

$$\psi = -\chi$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_\rho &= -2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{2l_\varepsilon}{\lambda}\frac{1}{r}\, I_\varepsilon \,\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\, e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)+\chi\right] \\ \mathcal{M}_\rho &= -2\pi\frac{2l_\varepsilon}{\lambda}\frac{1}{r}\, I_\varepsilon \,\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\, e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)+\chi\right] \end{aligned}\right\} \quad (216)$$

Puissance moyenne dépensée dans l'oscillateur d'émission. Puissance moyenne rayonnée. Rendement de l'oscillateur d'émission. — *80.* On a, comme dans le cas des oscillations entretenues.

Puissance moyenne dépensée dans l'oscillateur d'émission

$$P_{\varepsilon\ moy} = (R_\varepsilon + S_\varepsilon\omega)\, I^2_{\varepsilon\ eff}. \qquad (217)$$

Puissance moyenne rayonnée par l'oscillateur

$$P_{\varepsilon, r\ moy} = S_\varepsilon\omega^2\, I^2_{\varepsilon\ eff}. \qquad (218)$$

Rendement de l'oscillateur d'émission

$$\eta_\varepsilon^{\varepsilon r} = \frac{S_\varepsilon\omega^2}{R_\varepsilon + S_\varepsilon\omega^2}. \qquad (219)$$

Courant efficace dans l'oscillateur de réception. — *81.* On a, d'après l'expression (177), dans le cas de la résonance

$$I_{\rho\ eff} = \frac{\sqrt{N}\, E \,.\, 2\, l_\rho \cos\alpha}{2\,(R_\rho + S_\rho\omega^2)\sqrt{\alpha_\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}\right)}}$$

et, d'après (215)

$$E = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{2\,l}{\lambda}\,\frac{1}{r}\, I_\varepsilon \cos\varphi$$

puisque cos χ peut être égalé à l'unité.

On en déduit

$$I_{\rho\ eff} = \frac{\sqrt{N}\,.\,2\,l_\rho\cos\alpha}{2(R_\rho + S_\rho\omega^2)\sqrt{\alpha_\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}\right)}}\,.\,2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{2\,l}{\lambda}\,\frac{1}{r}\, I_\varepsilon\cos\varphi$$

ou, comme, d'après (211)

$$I_\varepsilon = \frac{2\sqrt{\alpha_\varepsilon}\, I_{\varepsilon\ eff}}{\sqrt{N}}$$

$$I_{\rho\ eff} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{2\,l_\varepsilon\,.\,2\,l_\rho}{R_\rho + S_\rho\omega^2}\,\frac{1}{\lambda r}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}}}\, I_{\varepsilon\ eff}\cos\varphi\cos\alpha. \qquad (220)$$

Si $\psi + 2\chi$ est fini, cette expression doit, d'après (176) être multipliée par le facteur de correction

$$\sqrt{1 + \sin 2(\psi + 2\chi)}$$

Dans le cas de la décharge oscillante du résonateur ($\psi + 2\chi = \chi$, χ^2 négligeable par rapport à l'unité), comme d'ailleurs μ^2 et ν^2 sont négligeables devant m^2, il n'y a pas à tenir compte du facteur de correction, qui est égal à un, à des termes négligeables près.

L'expression (220) ne diffère de l'expression correspondante (196), trouvée dans le cas des oscillations entretenues, que par le facteur

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta_\varepsilon}{\delta_\rho}}}$$

δ_ε et δ_ρ étant les décréments logarithmiques. Ce facteur représente l'effet de l'amortissement.

Puissance captée par le récepteur. Puissance utilisée. Rendement de la reception. — *82*. On a, comme dans le cas des oscillations entretenues.

Puissance moyenne totale soustraite au champ incident

$$P_{\rho\ moy} = (R_\rho + S_\rho \omega^2)\, I^2_{\rho\ eff}. \tag{221}$$

Puissance moyenne utilisable

$$P_{\rho j\ moy} = R_\rho\, I^2_{\rho\ eff}. \tag{222}$$

Rendement de la réception

$$\eta_\rho^{\rho j} = \frac{R_\rho}{R_\rho + S_\rho \omega^2}. \tag{223}$$

Rendement de la radiocommunication. — *83*. On peut, comme dans le cas des oscillations entretenues, considérer les différents rendements suivants :

$$\eta_\varepsilon^\rho = \frac{P_{\rho\ moy}}{P_{\varepsilon\ moy}} \frac{\text{Energie soustraite au champ émetteur}}{\text{Energie dépensée dans l'oscillateur d'émission}}$$

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho j} = \frac{P_{\rho j\ moy}}{P_{\varepsilon\ moy}} \frac{\text{Energie utilisable à la réception}}{\text{Energie dépensée dans l'oscillateur d'émission}}$$

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho} = \frac{P_{\rho\ moy}}{P_{\varepsilon r\ moy}} \frac{\text{Energie soustraite au champ émetteur}}{\text{Energie rayonnée par l'oscillateur d'émission}}$$

$$\eta_\varepsilon^{\rho j} = \frac{P_{\rho j\ moy}}{P_{\varepsilon r\ moy}} \frac{\text{Energie utilisable à la réception}}{\text{Energie rayonnée par l'oscillateur d'émission}}$$

Les expressions de ces divers rendements sont les mêmes que celles

que nous avons trouvées dans le cas des oscillations entretenues, multipliées toutefois par

$$\frac{1}{1+\frac{\delta_e}{\delta_p}}.$$

L'emploi des ondes amorties a donc comme conséquence une diminution du rendement de la radiocommunication.

2° Radiocommunications par oscillateurs fermés

I. — Le problème de la transmission

84. Le problème de la transmission par un oscillateur fermé, plan ou presque plan, possédant résistance, inductance, et capacité, peut se traiter de la même façon que pour les oscillateurs ouverts (§ 46 et suivants).

Différentes formes d'énergie dans l'oscillateur. — *85.* Les puissances instantanées dues à la capacité, à la self et à la résistance ont pour expression :

$$P_p = \frac{1}{C}\,\mathcal{Q}\,\frac{d\mathcal{Q}}{dt}$$

$$P_e = L\,\frac{d\mathcal{Q}}{dt}\,\frac{d\mathcal{Q}^2}{dt^2}$$

$$P_j = R\left(\frac{d\mathcal{Q}}{dt}\right)^2.$$

La puissance moyenne dépensée par rayonnement est, ainsi que nous l'avons vu au § 44

$$P_{r\ \text{moy}} = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon^3\mu^5}\ \omega^4\Sigma^2\ I_{\text{eff}}^2$$

$$P_{r\ \text{moy}} = T\omega^4\ I_{\text{eff}}^2$$

en posant :

$$T = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon^3\mu^5}\ \Sigma^2.$$

Oscillations libres de l'oscillateur fermé. — *86.* Nous avons vu que, dans le cas de l'oscillateur hertzien de dimensions petites par rapport à la longueur d'onde, le fait du rayonnement ne change pas le régime d'oscillation du conducteur : il oscille comme un circuit de capacité C, de self L, et de résistance $R + S\omega^2$.

Le circuit fermé que nous considérons maintenant étant la somme d'une série d'éléments de circuits ouverts, et rayonnant moins d'énergie que le circuit ouvert de mêmes dimensions, dans le cas où nous nous sommes placés (dimensions petites par rapport à la longueur d'onde), il est évident que le régime d'oscillations du circuit ne sera pas troublé par le fait du rayonnement. Le circuit oscillera comme s'il avait une capacité C, une self-induction L, et une résistance $R + T\omega^4$.

L'oscillation libre du circuit élémentaire est donc périodique amortie, de la forme

$$Ae^{-\alpha t} \sin (\omega t + \psi)$$

où α est la constante d'amortissement et ω la pulsation des oscillations. On a

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{R + T\omega^4}{2L} \\ \omega = \dfrac{1}{\sqrt{CL}} \end{cases}$$

Alimentation par une source à force électromotrice périodique. — *87*. Dans le cas de l'alimentation par une force électromotrice périodique

$$\mathfrak{U} = U \sin \omega t$$

on aura, par analogie avec le cas de l'oscillateur ouvert (§ 48)

$$\mathfrak{I} = \frac{U}{\sqrt{(R + T\omega^4)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin (\omega t - \gamma)$$

avec

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + T\omega^4}$$

et

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{(R + T\omega^4)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Dans le cas de la résonance :

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0\right)$$

$$\mathfrak{I} = \frac{U}{R + T\omega^4} \sin \omega$$

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R + T\omega^4}.$$

Ces résultats peuvent se discuter exactement comme dans le cas d'un oscillateur ouvert (§ 49 et suivants).

Cas d'un circuit composé de plusieurs spires. — *88.* Si, au lieu d'une seule, le circuit était formé de K spires identiques de surface Σ mises en série, il faudrait dans les expressions précédentes, remplacer Σ par KΣ.

On aurait alors

$$T = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon^3\mu^5}\, K^2\Sigma^2.$$

II. — Le problème de la réception

89. Considérons un circuit plan, de dimensions petites par rapport à la longueur d'onde, possédant une capacité C, une self L, et une résistance R, placé dans un champ électromagnétique d'intensité $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}$. Nous supposons la longueur d'onde grande par rapport à celle du conducteur, de telle sorte qu'on puisse considérer l'intensité comme constante tout le long de celui-ci.

Oscillations entretenues. Force électromotrice induite. — *90.* Prenons comme origine un point O situé dans ce plan à une distance du circuit très petite par rapport à la longueur d'onde (fig. 85). Soit Oz

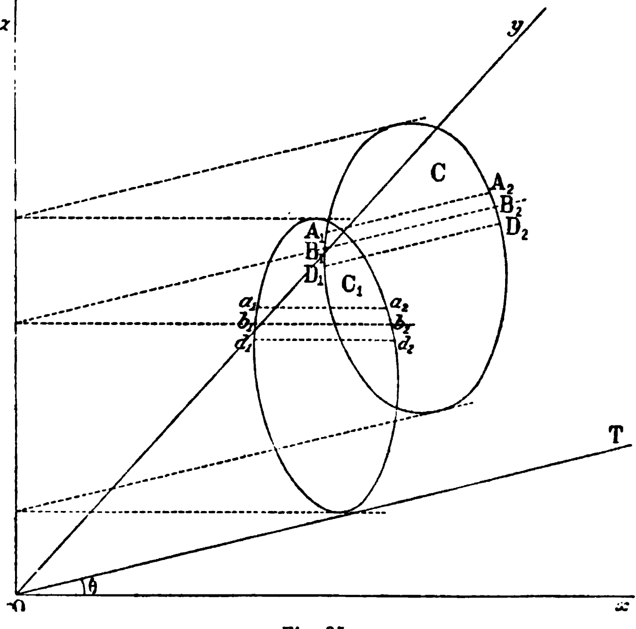


Fig. 85

parallèle à la force électrique, Ox parallèle à la direction de la propagation des ondes électromagnétiques. Soit OTz le plan dans lequel se trouve le circuit C. Appelons θ l'angle des deux plans OTz, Oxy.

Soit C la projection du circuit C sur le plan des xz.

Supposons la force électrique de la forme.

$$\frac{A}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right)$$

r étant très grand par rapport à la longueur d'onde. Nous voyons tout de suite que les dimensions du circuit étant négligeables par rapport à la longueur d'onde, le terme $\frac{A}{r}$ peut être considéré comme constant. Posons

$$\frac{A}{r} = E$$

la force électrique $\mathcal{E}$ a pour expression

$$\mathcal{E} = E \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right).$$

Considérons un élément A_1B_1 du circuit, de longueur dl. Le champ électromagnétique produit dans cet élément une force électromotrice $d\mathcal{V}_1$

$$d\mathcal{V}_1 = \mathcal{E} \,.\, dl \cos (\mathcal{E}_1, dl)$$
$$= E \,.\, dl \cos (\mathcal{E}_1, dl) \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) - Pd_1 \right]$$

le point d_1 étant la projection du milieu D_1 de l'élément A_1B_1 sur le plan des xz.

De même, l'élément A_2B_2, de longueur dl découpé dans le circuit par les parallèles A_1A_2, B_1B_2 au plan des xy, est soumis à une force électromotrice

$$d\mathcal{V}_2 = E .\, dl \cos (\mathcal{E}_1, dl) \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) - Pd_2 \right]$$

et la force électromotrice résultante $d\mathcal{V}$ des deux forces électromotrices $d\mathcal{V}_1$ et $d\mathcal{V}_2$ s'écrit

$$d\mathcal{V} = d\mathcal{V}_1 - d\mathcal{V}_2 = E dl \cos (\mathcal{E}_1, dl) \times$$
$$\times \left\{ - \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) - Pd_2 \right] + \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) - Pd_1 \right] \right\}$$

$$d\mathcal{V} = E dl \cos (\mathcal{E}_1, dl) \times$$
$$\times \left\{ \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) \left(\cos \frac{2\pi \times Pd_1}{\lambda} - \cos \frac{2\pi \times Pd_2}{\lambda} \right) - \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r \right) \right.$$
$$\left. \left(\sin \frac{2\pi \times Pd_1}{\lambda} - \sin \frac{2\pi \times Pd_2}{\lambda} \right) \right\}$$

ou, à des termes négligeables près,

$$\left(\frac{2\pi \times Pd_1}{\lambda}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2\pi \times Pd_2}{\lambda}\right)^2$$

étant négligeables par rapport à l'unité

$$d\mathfrak{V} = E \,.\, dl \cos(\mathcal{E}_1, dl) \times d_2 d_1 \times \frac{2\pi}{\lambda} \times \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} E \,.\, d\sigma \times \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$d\sigma$ représentant l'aire élémentaire $a_1 a_2 b_2 b_1$

Intégrons sur toute l'étendue du circuit, il vient

$$\mathfrak{V} = E \,.\, \frac{2\pi}{\lambda}\, \sigma \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$\mathfrak{V} = E \,.\, \frac{2\pi}{\lambda}\, \Sigma \cos\theta \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

où Σ représente l'aire du circuit C.

Nous venons de déduire l'expression de la force électromotrice induite dans un circuit fermé de celle que nous aurons obtenue pour un élément de conducteur. La question peut être traitée directement.

Si en effet Φ est le flux magnétique à travers le circuit, la force électromotrice a pour valeur

$$\mathfrak{V} = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Le flux magnétique est d'ailleurs égal au produit de la surface Σ du circuit par la projection du champ magnétique $\mathcal{M}$ sur la normale du circuit

$$\Phi = \mu \mathcal{M} \cos\theta$$

et, en remplaçant $\mathcal{M}$ par sa valeur :

$$\mathcal{M} = M \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$\Phi = \mu M \cos\theta \,.\, \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$\mathfrak{V} = \mu M \cos\theta \,.\, \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} \,.\, \cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

et comme

$$M = E\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

$$\mathfrak{V} = E \,.\, \frac{2\pi}{\lambda} \,.\, \Sigma \cos\theta \,.\, \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right).$$

Si le plan du circuit varie en restant parallèle à la force électrique, θ est l'angle que fait la direction de la propagation avec le plan du circuit : la force électromotrice produite dans le circuit est proportionnelle au cosinus de cet angle. Elle est maxima quand le plan du circuit est parallèle à la fois à la directien de la propagation et à la force électrique. Elle est nulle quand le plan du circuit est perpendiculaire à la direction de la propagation.

Si le plan du circuit varie en restant parallèle à la direction de la propagation, θ est l'angle que fait la force électrique avec le plan du circuit. La force électromotrice induite est proportionnelle au cosinus de cet angle. Elle est maxima quand le plan du circuit est parallèle à la fois à la direction de la propagation et à la force électrique. Elle est nulle quand le plan du circuit est perpendiculaire à la force électrique.

On peut tirer des considérations qui précèdent une méthode de détermination de la direction du champ électromagnétique et de celle de la propagation.

La valeur maxima de la force électromotrice induite dans le circuit a pour expression

$$V_1 = E \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \cos \theta.$$

Nous pouvons la comparer avec la valeur maxima de la force électromotrice induite obtenue dans le cas de la réception par un oscillateur ouvert :

$$V_2 = E \cdot 2l \cdot \cos \theta_1$$

θ_1 étant l'angle de l'oscillateur avec la force électrique.

Supposons par exemple les données suivantes :

Oscillateur ouvert :

$$2l = 10 \text{ mètres}$$

Oscillateur fermé : rectangle de 10 mètres de hauteur et 10 mètres de largeur

$$\Sigma = 100 \text{ mètres carrés.}$$

On a, pour les longueurs d'onde : 100, 1 000 et 10 000 mètres supposant

$$\theta = \theta_1 = 0.$$

Longueur d'onde (mètres)	100	1 000	10 000
$\frac{V_1}{V_2}$	0,628	0,0628	0,00628

Courant dans l'oscillateur de réception. — ***91.*** Pour obtenir l'expression du courant dans l'oscillateur de réception, il nous suffit de remplacer dans les relations trouvées au § 87.

$\mathfrak{U}$ par la valeur de la force électromotrice induite que nous venons de trouver :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \mathrm{E}\Sigma \cos\theta \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right).$$

On trouve ainsi

$$\mathfrak{I} = \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \cos\theta \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{(\mathrm{R} + \mathrm{T}\omega^4)^2 + \left(\mathrm{L}\omega - \frac{1}{\mathrm{C}\omega}\right)^2}} \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r - \gamma\right)$$

en posant

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\mathrm{L}\omega - \frac{1}{\mathrm{C}\omega}}{\mathrm{R} + \mathrm{T}\omega^4}$$

$$\mathrm{I}_{\mathrm{eff}} = \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \cos\theta \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{eff}}}{\sqrt{(\mathrm{R} + \mathrm{T}\omega^4) + \left(\mathrm{L}\omega - \frac{1}{\mathrm{C}\omega}\right)^2}}.$$

Dans le cas de la résonance

$$\mathrm{L}\omega - \frac{1}{\mathrm{C}\omega} = 0$$

$$\mathfrak{I} = \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \cos\theta \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R} + \mathrm{T}\omega^4} \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$\mathrm{I}_{\mathrm{eff}} = \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \cos\theta \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{R} + \mathrm{T}\omega^4}.$$

Puissance soustraite au champ incident. Puissance utilisable. Rendement. — 92. *Puissance utilisable à la réception* (on néglige les pertes par résistance ohmique dans le circuit).

$$\mathrm{P}_j = \mathrm{R}\,\mathrm{I}^2_{\mathrm{eff}}.$$

Puissance soustraite au champ émetteur

$$\mathrm{P} = (\mathrm{R} + \mathrm{T}\omega^4)\,\mathrm{I}^2_{\mathrm{eff}}.$$

Rendement de la réception

$$\eta_{\rho}^{\rho j} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} + \mathrm{T}\omega^4}.$$

Cas d'un circuit composé de plusieurs spires. — 93. Si, au lieu d'une seule, le circuit comportait K spires identiques de surface Σ montées en

série, il faudrait, dans les expressions précédentes, remplacer Σ par $K\Sigma$ et l'on aurait

$$T = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon^3\mu^5}\, K^2\Sigma^2$$

$$\mathcal{V} = E \cdot \frac{2\pi}{\lambda} K\Sigma \cos\theta \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$\mathcal{J} = \frac{2\pi}{\lambda} K\Sigma \cos\theta\, \frac{E}{R + T\omega^4} \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r - \gamma\right)$$

dans le cas de la résonance.

Oscillations amorties. — *94.* Soit

$$\mathcal{E} = E\, e^{-\alpha_\varepsilon t} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi\right]$$

le champ incident.

Force électromotrice induite. — *95.* On obtient, par un calcul analogue à celui du § 91

$$\mathcal{V} = E \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \cos\theta\, e^{-\alpha_\varepsilon t} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi\right].$$

Posons

$$\omega_\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\alpha_\rho = \frac{R + T\omega^4}{2L}$$

$$\omega_\rho = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$m = \frac{\omega_\varepsilon + \omega_\rho}{2} \qquad n = \frac{\omega_\varepsilon - \omega_\rho}{2} \qquad \mu = \frac{\alpha_\varepsilon + \alpha_\rho}{2} \qquad \nu = \frac{\alpha_\varepsilon - \alpha_\rho}{2}.$$

Quantité d'électricité. — *96.* On a, par un calcul analogue à celui qui a été développé ci-dessus (§ 63) dans le cas de l'oscillateur ouvert :

$$\mathcal{Q} = M \sin(mt + m')$$

avec

$$M^2 = \frac{\left(E \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \cos\theta\right)^2}{16L^2m^2(n^2 + \nu^2)} \left\{ T_1 + 2\,\frac{1 + \cos\psi}{m} T_2 + \frac{2\sin\psi}{m} T_3 \right\}$$

T_1, T_2, T_3, ayant les valeurs données au § 63.

$\mathfrak{U}$ par la valeur de la force électromotrice induite que nous venons de trouver :

$$\frac{2\pi}{\lambda} E\Sigma \cos\theta \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right).$$

On trouve ainsi

$$\mathfrak{I} = \frac{2\pi}{\lambda}\Sigma\cos\theta \frac{E}{\sqrt{(R + T\omega^4)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r - \gamma\right)$$

en posant

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + T\omega^4}$$

$$I_{eff} = \frac{2\pi}{\lambda}\Sigma\cos\theta \frac{E_{eff}}{\sqrt{(R + T\omega^4) + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Dans le cas de la résonance

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\mathfrak{I} = \frac{2\pi}{\lambda}\Sigma\cos\theta\frac{E}{R + T\omega^4}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$I_{eff} = \frac{2\pi}{\lambda}\Sigma\cos\theta\frac{E_{eff}}{R + T\omega^4}.$$

Puissance soustraite au champ incident. Puissance utilisable. Rendement. — 92. *Puissance utilisable à la réception* (on néglige les pertes par résistance ohmique dans le circuit).

$$P_j = R\, I_{eff}^2.$$

Puissance soustraite au champ émetteur

$$P = (R + T\omega^4)\, I_{eff}^2.$$

Rendement de la réception

$$\eta_{\rho}^{\rho j} = \frac{R}{R + T\omega^4}.$$

Cas d'un circuit composé de plusieurs spires. — 93. Si, au lieu d'une seule, le circuit comportait K spires identiques de surface Σ montées en

série, il faudrait, dans les expressions précédentes, remplacer Σ par $K\Sigma$ et l'on aurait

$$T = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon^3\mu^5}\, K^2\Sigma^2$$

$$\mathcal{V} = E \,.\, \frac{2\pi}{\lambda} K\Sigma \cos\theta \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)$$

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi}{\lambda} K\Sigma \cos\theta \frac{E}{R + T\omega^4} \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r - \gamma\right)$$

dans le cas de la résonance.

Oscillations amorties. — *94*. Soit

$$\mathcal{E} = E\, e^{-\alpha_\varepsilon t} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi\right]$$

le champ incident.

Force électromotrice induite. — *95*. On obtient, par un calcul analogue à celui du § 91

$$\mathcal{V} = E \,.\, \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \cos\theta\, e^{-\alpha_\varepsilon t} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi\right].$$

Posons

$$\omega_\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\alpha_\rho = \frac{R + T\omega^4}{2L}$$

$$\omega_\rho = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$m = \frac{\omega_\varepsilon + \omega_\rho}{2} \qquad n = \frac{\omega_\varepsilon - \omega_\rho}{2} \qquad \mu = \frac{\alpha_\varepsilon + \alpha_\rho}{2} \qquad \nu = \frac{\alpha_\varepsilon - \alpha_\rho}{2}.$$

Quantité d'électricité. — *96*. On a, par un calcul analogue à celui qui a été développé ci-dessus (§ 63) dans le cas de l'oscillateur ouvert :

$$\mathcal{Q} = M \sin(mt + m')$$

avec

$$M^2 = \frac{\left(E \,.\, \frac{2\pi}{\lambda}\Sigma\cos\theta\right)^2}{16 L^2 m^2 (n^2 + \nu^2)} \left\{ T_1 + 2\,\frac{1 + \cos\psi}{m} T_2 + \frac{2\sin\psi}{m} T_3 \right\}$$

T_1, T_2, T_3, ayant les valeurs données au § 63.

Intensité du courant. — *97*. On a ensuite, comme au § 64.

$$\mathfrak{I} = \frac{dQ}{dt} = Mm \cos (mt + m')$$

et s'il y a N trains d'oscillations par unité de temps

$$I_{eff} = \pi \frac{\sqrt{N} . E . \Sigma \cos \theta}{\lambda (R + T\omega^4) \sqrt{\alpha_\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}\right)}}.$$

Circuit composé de plusieurs spires. — *98*. Dans le cas d'un circuit composé de K spires parallèles de surface Σ, on remplacera, dans les expressions précédentes, Σ par KΣ.

Cas à envisager en vue des applications pratiques. Nécessité d'employer de hautes fréquences.

99. Nous verrons plus tard que, dans l'application aux radiocommunications, *le cas qui se présente le plus souvent est*, du moins dès que la longueur d'onde est un peu grande, celui de *résistances grandes par rapport aux radiances*.

Dans ce cas, le *rendement d'ensemble*, ou rapport de l'énergie utilisée à la réception à l'énergie dépensée dans l'antenne d'émission est, inversement proportionnel, dans le cas des oscillateurs ouverts, au carré de la longueur d'onde, et, dans le cas des oscillateurs fermés, à la 4ème puissance de la longueur d'onde.

Ainsi s'explique la *nécessité d'employer*, pour les radiocommunications, des courants de faibles longueurs d'onde, ou *de hautes fréquences*. Nous verrons plus loin quels correctifs il est nécessaire d'appliquer à la loi théorique que nous venons d'établir. Il n'en est pas moins vrai que la fréquence sera toujours notablement plus grande que celle des courants industriels (inférieure à 100), ou même des courants téléphoniques (de l'ordre de 1 000) : *les radiocommunications sont une application des phénomènes de haute fréquence*.

3° Théorie générale des radiocommunications à travers un diélectrique indéfini (Henri Poincaré) [1]

Les principes que nous venons d'exposer peuvent servir de base à l'étude des radiocommunications par oscillateurs de formes et de dimensions quelconques, puisque ceux-ci peuvent toujours se résoudre en un certain nombre d'oscillateurs élémentaires, soit ouverts, soit fermés, soit des deux sortes.

Dans ce chapitre, où nous n'avons en vue que l'étude des questions de principe, nous ne pousserons pas plus loin l'étude des diverses sortes d'oscillateurs, nous réservant d'y revenir plus tard quand nous nous occuperons des antennes pour radiocommunications.

Nous indiquerons toutefois les éléments d'une méthode indiquée par Henri Poincaré pour l'étude du problème général des radiocommunications à travers un diélectrique parfait, entre oscillateurs de formes et de dimensions quelconques.

Principe. — *67.* Les phénomènes envisagés étant de haute fréquence, (§ 99), nous pouvons supposer les courants localisés à la surface des conducteurs (§ 30, ch. I). Nous supposerons de plus les phénomènes de la forme

$$A\, e^{i\omega t}$$

c'est-à-dire alternatifs, avec ou sans amortissement.

Le problème se pose de façons différentes suivant qu'on s'occupe de l'émission ou de la réception, ainsi que nous l'avons déjà vu ci-dessus dans l'étude de radiocommunications par conducteurs très courts par rapport à la longueur d'onde.

Dans le cas de la réception, on suppose un conducteur d'émission qui produirait à grande distance, en l'absence du récepteur, un champ électromagnétique connu. Dans le conducteur de réception prennent naissance des courants superficiels de densité I_x, I_y, I_z et une densité superficielle électrique e. En écrivant que le champ magnétique total à l'intérieur du conducteur, champ dû à l'excitateur et aux courants superficiels du récepteur a ses composantes nulles, nous obtiendrons des équations intégrales déterminant le vecteur I_x, I_y, I_z, et, par conséquent, le potentiel vecteur de Lorentz.

Dans le cas de l'émission, on suppose le récepteur assez éloigné pour que ses réactions sur le transmetteur soient négligeables, et l'on n'a plus à considérer qu'un seul conducteur, celui d'émission. L'émission pourra se faire de deux façons différentes. Ou bien le conducteur (ou l'ensemble des conducteurs) d'émission, sera périodiquement dérangé de son état d'équilibre électrique, et, abandonné ensuite à lui-même, reviendra à l'équilibre après une série d'oscillations amorties. Il suffira alors, pour obtenir des équations intégrales déterminant I_x, I_y, I_z, d'écrire que le champ magnétique dû aux courants superficiels du conducteur d'émission, a ses composantes nulles à l'intérieur de ce conducteur. Si au contraire le transmetteur est soumis à des forces électromotrices on aura encore des équations intégrales à second membre connu comme dans le cas de la réception.

Henri Poincaré n'a examiné que le cas des oscillations libres et celui de la réception.

Equation intégrale de la densité de courant. — *68.* Le vecteur I, densité superficielle de l'intensité de courant est, ainsi que nous l'avons vu plus haut (ch. I, § 32), tangent à la surface du conducteur ; il est d'ailleurs (ch. I, § 32), perpendiculaire au champ magnétique et proportionnel à celui ci :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_x = -4\pi I_y \\ \mathcal{H}_y = 4\pi I_x \\ \mathcal{H}_z = 0 \end{cases}$$

le point considéré étant pris comme origine et la normale au conducteur comme axe des z.

On sait d'ailleurs (ch. I, § 7) que $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$, $\mathcal{H}_z$ se déduisent par différentiation d'une fonction potentielle. P_x, P_y, P_z (Potentiel vecteur de Lorenz), dont les composantes sont les potentiels retardés des courants de conduction

Soit $d\sigma'$ un petit élément de la surface : soit I' la densité du courant en ce point ; supposons d'autre part que les courants aient le caractère d'oscillations de haute fréquence, et qu'on puisse les supposer proportionnels à $e^{i\omega t}$.

Le potentiel vecteur de Lorenz dû à l'élément $d\sigma'$ a pour composantes (ch. I, § 31)

$$p_x = I' \cos(I', x) \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'$$

et deux expressions semblables pour p_y et p_z d'où, pour les dérivées par rapport à x, y, z, des expressions telles que

$$\frac{\partial p_x}{\partial z} = I' (\cos I', x) \cos(y, r) \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\omega r}}{r}\right) d\sigma'$$

et, pour les forces magnétiques élémentaires m_x, m_y

$$\begin{cases} m_x = \dfrac{\partial p_z}{\partial y} - \dfrac{\partial p_y}{\partial z} \\ m_y = \dfrac{\partial p_x}{\partial z} - \dfrac{\partial p_z}{\partial x} \end{cases}$$

les valeurs

$$m_x = I' \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\omega r}}{r}\right) \left[\cos(I', z)\cos(y, r) - \cos(I', y)\cos(z, r)\right] d\sigma'$$

$$m_y = I' \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\omega r}}{r}\right) \left[\cos(I', x)\cos(z, r) - \cos(I', z)\cos(x, r)\right] d\sigma'$$

Il n'y a pas de difficulté tant que l'élément $d\sigma'$ ne se trouve pas à l'origine ($r = 0$).

Les valeurs $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$ dues à l'ensemble de la surface conductrice, s'obtiendront en intégrant m_x, m_y pour la surface entière du conducteur, sauf un domaine infiniment petit limité par un anneau de garde tracé autour de l'origine et tendant vers zéro.

Considérons maintenant le vecteur, perpendiculaire à $\mathcal{H}$, et situé dans le plan tangent, dont les composantes sont

suivant Ox $\mathcal{H}_y$
suivant Oy $\mathcal{H}_x$;

il se présente sous la forme d'une intégrale définie S (I), s'étendant à toute la surface moins l'anneau de garde considéré.

En un point quelconque de la surface, le vecteur champ magnétique est perpendiculaire à S (I) et égal en grandeur à S (I).

Si le point considéré était extérieur à la surface, les axes restant toujours ceux que nous venons de considérer, le vecteur S (I), tel que nous l'avons défini, serait perpendiculaire à la projection du champ magnétique sur le plan des xy, et égal en grandeur à celle-ci ; en d'autres termes, il serait égal à la moyenne des composantes de $\mathcal{M}$, parallèles au plan des xy, en deux points infiniment voisins du point considéré, et également distantes de celui-ci. Si nous considérons un point de la surface du conducteur, le champ magnétique $\mathcal{M}$ tel que nous venons de le définir en fonction de I, sera donc la moyenne des valeurs des champs magnétiques en des points infiniment voisins de la surface, à l'intérieur et à l'extérieur de celle-ci.

Mais nous savons (ch. I, § 26 et 32), que la force magnétique subit en passant de l'intérieur à l'extérieur de la surface, une discontinuité $4\pi I$.

Il en résulte que la force magnétique M_1 à l'extérieur de la surface a pour valeur

$$S(I) + 2\pi I$$

et que la force magnétique M_2 à l'intérieur a pour valeur

$$S(I) - 2\pi I.$$

En écrivant que le champ magnétique à l'intérieur de la surface est nul (ch. I, § 26), nous obtenons l'équation intégrale

$$S(I) - 2\pi I = 0$$

ou, en posant

$$\frac{1}{2\pi} = \lambda$$

$$I = \lambda S(J)$$

équation qui détermine la valeur I du courant de conduction en tout point de la surface du conducteur.

Cas de la réception. — *69.* Dans le cas de la réception, nous avons en présence deux conducteurs, le conducteur excitateur, à la surface duquel nous connaissons la valeur du courant I, et le conducteur récepteur, sur lequel le courant est inconnu. S (I) peut donc se décomposer en deux parties, l'une connue, que nous pourrons poser égale à $\frac{T}{\lambda}$, et qui est due à l'excitateur, l'autre S_a (I), due aux courants superficiels inconnus du récepteur, et l'équation précédente s'écrit

$$I = \lambda S(J) + T.$$

C'est une équation de Fredholm. Cet auteur a montré qu'il est possible d'écrire la solution sous la forme

$$J = \frac{D}{\Delta}$$

D et Δ étant des séries très convergentes, de la forme

$$A_0 + A\lambda + \ldots\ldots + A_n\lambda^n + \ldots\ldots$$

dont les coefficients sont des fonctions connues de λ.

Cas des oscillations libres. — *70.* Dans le cas de l'émission avec ondes amorties, il n'y a plus que les conducteurs d'émission. La fonction T disparaît, et l'équation devient

$$I = \lambda S(J).$$

C'est une équation de Fredholm sans second membre. On sait qu'elle n'admet de solution que si

$$\Delta = 0.$$

Mais Δ est une fonction entière de $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ et de ω. L'équation

$$\Delta = 0$$

définit donc la période et l'amortissement de l'excitateur donné. Nous reviendrons sur cette question au moment de l'étude des diverses formes d'antennes.

Nous renvoyons d'ailleurs le lecteur, pour des détails mathématiques sur l'équation de Fredholm, au mémoire de Henri Poincaré, et à l'ouvrage suivant :

H. B. Heywood et M. Fréchet. — *L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique.* Paris, Hermann, 1912.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Hertz. — *Wiedemann Annalen*, 1889, vol. XXXVI, p. 1.
2. K. Pearson et Miss Alice Lee. — *On the vibrations on the field round a theoretical hertzian oscillator. Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. CXCIII A, 1900, p. 159.
3. A. E. H. Love. — *The advancing front of the train of waves emitted by a theoretical hertzian oscillator. Proceedings of the Royal Society of London*, vol. LXXIV, p. 73, 1904.
4. Max Planck. — *Uber elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden. Annalen der Physik*, vol. LX, p. 577, 1897.
5. R. Rüdenberg. — *Der Empfang elektrischer Wellen in der drahtlosen telegraphie. Annalen der Physik*, vol. XXV, p. 446, 1908.
6. Henri Poincaré. — *Sur diverses questions relatives à la télégraphie sans fil. Lumière électrique*, 7 janvier 1911, p. 7.
7. V. Bjerknes. — *Uber elektrische Resonanz. Wiedemann Annalen*, vol. LV, 1895, p. 121.
8. J. A. Fleming. — *A note on the theory of Directive Antennae or Unsymmetrical Hertzian Oscillators. Proceedings of the Royal Society of London*, vol. LXXVIII A, 1906, p. 3.

CHAPITRE III

RADIOCOMMUNICATIONS DANS L'HYPOTHÈSE D'UN SOL PLAN, PARFAITEMENT CONDUCTEUR, ET D'UNE ATMOSPHÈRE PARFAITEMENT DIÉLECTRIQUE

I. — ***Divers modes de prises de terre.***

Antennes réunies à la terre à leur base.
Antennes avec contrepoids.
Cadres fermés.

II. — ***Formules fondamentales de la théorie des radiocommunications.***

1° Radiocommunications par antennes ouvertes.

Antennes à capacité concentrés au sommet. Rayonnement. Cas des oscillations entretenues et des oscillations amorties. Emission. Réception. Rendement. Portée.
Antennes de formes et de dimensions quelconques.
Cas à envisager pour les applications pratiques.

2° Radiocommunications par cadres fermés.

Rayonnement. Cas des oscillations entretenues et des oscillations amorties. Emission. Réception. Application à la recherche de l'aziment d'un poste émetteur.

I. — Divers modes de prises de terre

Antennes réunies à la terre à leur base. — *1.* Le cas, examiné ci-dessus, d'émission et de réception avec oscillateurs de Hertz, est purement théorique. Il ne saurait être question, en pratique, d'avoir des oscillateurs isolés dans un diélectrique indéfini : la terre est toujours à une distance des conducteurs d'émission et de réception très

petite par rapport à celle qui les sépare, et la pratique a dès le début de l'histoire de la télégraphie sans fil amené Marconi à *réunir à la terre la base de l'antenne.*

L'explication de la réussite de ce procédé a été donnée dès 1898, d'une manière très claire par **A. Blondel**, dont nous reproduisons les explications [1].

« Il est du reste facile de ramener ce problème (le problème de l'émission) à celui de l'oscillateur de Hertz. Supposons en effet que la terre qui ici, joue le rôle d'un conducteur sur lequel glissent normalement les ondes, au lieu d'être un conducteur médiocre soit un conducteur parfait ; on pourra, sans changer les conditions de propagation, le remplacer fictivement par un mince disque (ou culotte) d'un métal parfaitement conducteur.

« Les ondes hertziennes, quelles qu'en soit la forme, que nous n'avons pas besoin d'analyser, donneront lieu à des courants électriques superficiels dans le fil formant l'antenne et à la surface supérieure du disque.

Imaginons [*] qu'on forme l'*image* de l'antenne d'émission par rapport à ce disque et qu'on adapte à cette antenne-image un oscillateur semblable au premier avec une *force électromotrice* égale et opposée à celle de l'antenne réelle.

Il se produira à la surface intérieure du disque des courants superficiels qui annuleront constamment, en tout point de l'espace, l'action de ceux de la surface supérieure auxquels ils sont égaux et opposés. Tout se passera donc comme si le disque (ou la terre) n'existait pas et comme s'il n'y avait que les deux antennes opposées dont la réunion constitue précisément un oscillateur de Hertz. D'où la conclusion *que l'ensemble de l'antenne et de la terre, supposée conducteur parfait, est équivalent à la moitié d'un excitateur de Hertz de longueur et de potentiel doubles.*

Le même raisonnement montre aussi que *l'ensemble de l'antenne réceptrice et de la terre est équivalente à un résonnateur rectiligne de longueur double, au milieu duquel serait intercalé le cohéreur.* »

Antennes avec contrepoids. — *2.* Au lieu de mettre à la terre la base de l'antenne, il est parfois avantageux, ainsi que nous le verrons plus loin, quand nous étudierons les propriétés des antennes, de disposer un contrepoids, c'est-à-dire un réseau de fils, tendus horizontalement et reliés à la base de l'antenne (fig. 86).

[*] Cette idée m'a été suggérée par une remarque de M. Poincaré.

Dans ce cas, le contrepoids forme avec la surface de la terre, supposée parfaitement conductrice, un condensateur de grande capacité. L'insertion de ce condensateur à la base de l'antenne n'apporte aucun changement dans la distribution du courant. Elle introduit, en effet, dans les équations différentielles un terme

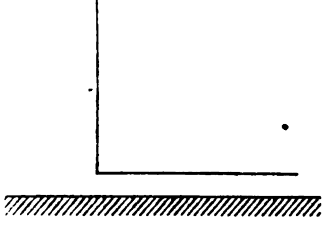
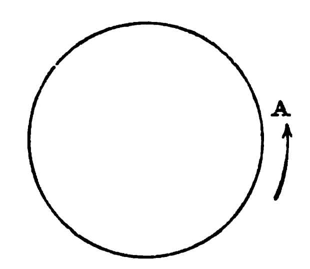


Fig. 86.

$$\frac{1}{C} Q$$

très petit par rapport aux autres, puisque C est supposé très grand.

Cadres fermés. — *3*. Supposons maintenant que nous mettions à la place de l'antenne un cadre fermé vertical. Le système formé par ce cadre et la terre est identique, au point de vue des effets dans le diélectrique, à celui d'un système composé du cadre A et de son symétrique B par rapport à la terre, le courant étant de même sens dans A et B (fig. 87).



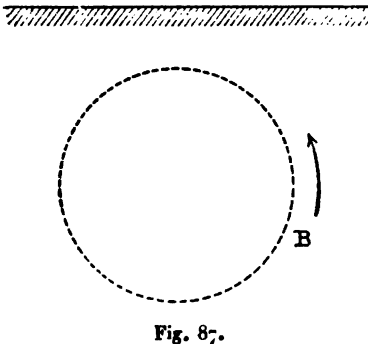


Fig. 87.

Remarque. — *4*. Nous avons supposé d'une part la terre parfaitement conductrice, d'autre part la liaison avec le sol sans résistance. Dans la pratique, ces conditions ne sont pas réalisées : les prises de terre possèdent ordinairement résistance, inductance, et capacité, et leurs propriétés interviennent dans le fonctionnement des antennes.

Nous étudierons les propriétés des prises de terre en même temps que celles des antennes, dans les chapitres qui leur sont réservés dans un volume suivant.

II. — Formules fondamentales de la théorie des radiocommunications

1° **Radiocommunications par antennes ouvertes.** — 5. Soient deux antennes, l'une d'émission, parcourue par un courant connu, l'autre de réception, munie de dispositifs permettant d'utiliser l'énergie qu'elle capte à l'extérieur. Nous les réunissons à leurs bases au sol que nous supposons parfaitement conducteur, plan, et indéfini.

A) Antennes a capacités concentrées au sommet. — Nous examinerons d'abord le cas d'antennes formées d'un conducteur vertical relié à la terre à sa base et réuni, à son extrémité supérieure à un système conducteur B, horizontal, dont la capacité par rapport à la terre est notablement plus grande que celle du fil A.

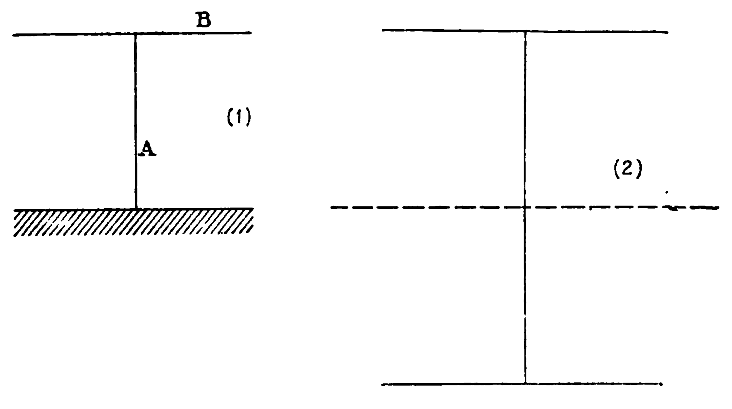


Fig. 88.

Nous nous contenterons d'étudier ici ce cas particulier. Le cas d'antennes verticales symétriques d'autres formes sera ramené à celui-ci au moment de l'étude des antennes, dans un volume suivant.

Comparons cette antenne (système 1, fig. 88) à un oscillateur (système 2) formé du système AB et de son symétrique par rapport au plan de séparation de l'air et de la terre, celle-ci étant supposée enlevée.

Nous avons vu ci-dessus, qu'au point de vue du champ électromagnétique à grande distance les deux systèmes sont équivalents.

Donc, pour une même intensité de courant.

Le champ à grande distance est le même dans les deux systèmes.

L'énergie rayonnée par le système (1) est la moitié de l'énergie rayonnée par le système (2).

L'énergie captée et l'énergie utilisée sont, dans le cas du système (1), moitié des quantités correspondantes dans le cas du système (2).

Nous pourrons donc facilement, des relations trouvées ci-dessus pour l'oscillateur de Hertz, déduire les expressions correspondantes pour le système (1).

Nous savons d'ailleurs que, tant que la longueur d'onde est grande par rapport à la hauteur de l'antenne ainsi constituée, le courant est indépendant du point considéré le long du conducteur vertical. Nous sommes ici dans ce cas.

Rayonnement des antennes. — *6.* Il résulte de ce que nous venons d'exposer qu'une antenne de hauteur l, parcourue par un courant d'intensité efficace $I_{\varepsilon\, eff}$ rayonnera une puissance moyenne égale à la moitié de celle qui rayonnerait un oscillateur hertzien de longueur $2\,l$.

On a donc

$$P_{r\,moy} = S\omega^2 I_{\varepsilon\, eff} \qquad (1)$$

avec

$$S = \frac{4}{3} l^2 \sqrt{\varepsilon\mu}\, \mu \qquad (2)$$

$$S\omega^2 = S \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2 \varepsilon\mu} = \frac{16\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{l^2}{\lambda^2}. \qquad (3)$$

En unités électromagnétiques CGS

$$S\omega^2 = \frac{16\pi^2}{3}\, \Omega\, \frac{l^2}{\lambda^2} \quad \text{unités électromagnétiques CGS.} \qquad (4)$$

En unités pratiques CGS

$$S\omega^2 = 160\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} \quad \text{ohms.} \qquad (5)$$

Oscillations entretenues. Émission. Champ à grande distance de l'antenne d'émission. — *7.* Soient

$I_{\varepsilon\, eff}$ le courant efficace dans l'antenne d'émission,

l_ε la hauteur de cette antenne,

ω la pulsation de l'onde émise, λ la longueur d'onde,

r la distance du point M du champ,

φ l'angle du rayon vecteur allant de l'oscillateur au point M, avec le plan de séparation entre l'air et le sol.

Les expressions de la force électrique et de la force magnétique efficaces au point M sont les mêmes que dans le cas de l'oscillateur Hertzien

$$\left.\begin{aligned} E_{\rho\,\text{eff}} &= 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{2\,l_\varepsilon}{\lambda}\,\frac{1}{r}\,I_{\varepsilon\,\text{eff}}\cos\varphi \\ M_{\rho\,\text{eff}} &= 2\pi\,\frac{2\,l_\varepsilon}{\lambda}\cdot\frac{1}{r}\,I_{\varepsilon\,\text{eff}}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Dans l'air, en unités électromagnétiques CGS

$$\mu = 1 \qquad \varepsilon = \frac{1}{\Omega^2}$$

Ω étant la vitesse de la lumière ; d'où

$$\left.\begin{aligned} E_{\rho\,\text{eff}} &= 4\pi\Omega\,\frac{l_\varepsilon}{\lambda}\,\frac{1}{r}\,I_{\varepsilon\,\text{eff}}\cos\varphi \\ M_{\rho\,\text{eff}} &= 4\pi\,\frac{l_\varepsilon}{\lambda}\,\frac{1}{r}\,I_{\varepsilon\,\text{eff}}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \text{unités électromagnétiques CGS} \qquad (7)$$

En unités pratiques, $I_{\varepsilon\,\text{eff}}$ étant exprimé en ampères ; λ, l_ε et r en centimètres ; E_ρ en volts par centimètre, on a

$$E_{\rho\,\text{eff}}\,(\text{volts/centimètre}) = 120\pi\,\frac{l_\varepsilon}{\lambda}\,\frac{1}{r}\cos\varphi\; I_{\varepsilon\,\text{eff}}\,(\text{amp.}) \qquad (8)$$

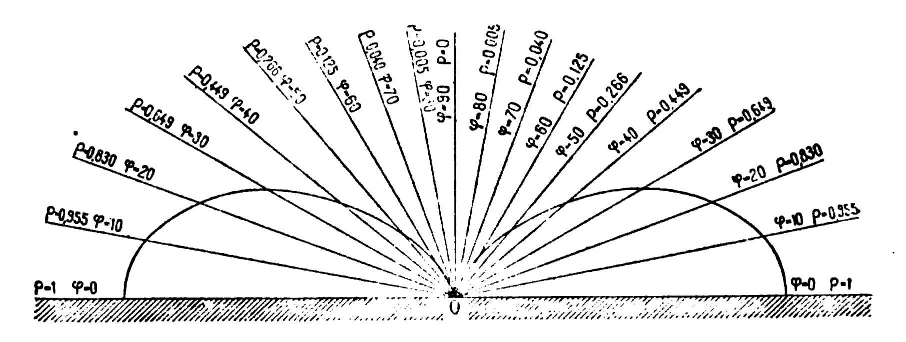


Fig. 89.

Variation de la puissance rayonnée à travers un élément de surface d'onde donné, avec la latitude φ de cet élément. — *8*. Dans un plan méridien donné, l'énergie rayonnée varie comme le cube du cosinus de l'angle φ, ainsi que nous l'avons vu pour l'oscillateur de Hertz.

La figure 89 représente cette variation. Une courbe de ce genre avait été donnée par A. Blondel en 1903, au Congrès d'Angers de l'association française pour l'avancement des sciences.

Puissance moyenne rayonnée par l'antenne. — *9.* Elle est la moitié de celle qui serait rayonnée par l'oscillateur de longueur $2\,l_\varepsilon$. Donc

$$P_{\varepsilon r \text{ moy}} = S_\varepsilon \omega^2 I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \tag{9}$$

avec

$$S_\varepsilon = \frac{4}{3} l_\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon\mu} \cdot \mu \tag{10}$$

Puissance moyenne dépensée en chaleur dans l'antenne.

10.
$$P_{\varepsilon j \text{ moy}} = R\, I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \tag{11}$$

R étant la résistance de l'antenne.

Puissance moyenne totale dépensée dans l'antenne.

11.
$$P_{\varepsilon \text{ moy}} = (R + S_\varepsilon \omega^2)\, I^2_{\varepsilon \text{ eff}} \tag{12}$$

Rendement de l'antenne.

12.
$$\eta_\varepsilon^{\varepsilon r} = \frac{P_{\varepsilon r \text{ moy}}}{P_{\varepsilon \text{ moy}}} = \frac{S\,\omega^2}{R + S_\varepsilon \omega^2}. \tag{13}$$

Si la résistance est grande par rapport à la radiance

$$\eta_\varepsilon^{\varepsilon r} = \frac{S_\varepsilon \omega^2}{R}. \tag{14}$$

Si la radiance est grande par rapport à la résistance

$$\eta_\varepsilon^{\varepsilon r} = 1.$$

Si la radiance est égale à la résistance, ce qui correspond au cas où, pour une antenne de résistance donnée, on rayonne l'énergie maxima

$$R = S_\varepsilon \omega^2 \tag{15}$$

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Réception. Courant dans l'antenne de réception. — *13.* On a, dans le cas général

$$I_{\rho \text{ eff}} = \frac{E_{\rho \text{ eff}} \cdot l_\rho}{\sqrt{(R_\rho + S_\rho \omega^2)^2 + \left(L_\rho \omega - \frac{1}{C_\rho} \omega\right)^2}} \tag{17}$$

et, dans le cas de la résonance

$$I_{\rho \text{ eff}} = \frac{E_{\rho \text{ eff}} \cdot l_\rho}{R_\rho + S_\rho \omega^2}. \tag{18}$$

Nous supposerons toujours, dans ce qui suit, que la résonance est établie.

En combinant les relations (18) et (7) on obtient l'expression du courant dans l'antenne de réception en fonction du courant dans l'antenne d'émission et des constantes des deux conducteurs

$$I_{\rho\,\text{eff}} = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{l_\varepsilon \,.\, l_\rho}{R_\rho + S_\rho\omega^2} \cdot \frac{1}{\lambda r} I_{\varepsilon\,\text{eff}}. \qquad (19)$$

En unités électromagnétiques CGS

$$I_{\rho\,\text{eff}} = 4\pi\Omega \frac{l_\varepsilon l_\rho}{R_\rho + S_\rho\omega^2} \frac{1}{\lambda r} I_{\varepsilon\,\text{eff}} \quad \text{(Unités électromagnétiques CGS)}. \qquad (20)$$

En unités pratiques

$$I_{\rho\,\text{eff}} = 120 \,.\, \pi \,.\, \frac{l_\varepsilon l_\rho}{R_\rho + S_\rho\omega^2} \cdot \frac{1}{\lambda r} I_{\varepsilon\,\text{eff}}. \qquad (21)$$

Puissance moyenne soustraite au champ émetteur. Puissance utilisable. Rendement de la réception. — *14.* La puissance moyenne totale soustraite au champ de l'antenne d'émission a pour expression

$$P_{\rho\,\text{moy}} = (R_\rho + S_\rho\omega^2)\, I^2_{\rho\,\text{eff}}. \qquad (22)$$

La puissance moyenne utilisable est

$$P_{\rho_u\,\text{moy}} = R_{\rho_u} I^2_{\rho\,\text{eff}}. \qquad (23)$$

En substituant la valeur de $I_{\rho\,\text{eff}}$ (relation 19) dans ces expressions, on obtient

$$\left.\begin{aligned} P_{\rho\,\text{moy}} &= 16\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{l_\varepsilon l_\rho}{R_{\rho_u} + T_\rho} \frac{1}{\lambda^2 r^2} I^2_{\varepsilon\,\text{eff}} \\ P_{\rho_j\,\text{moy}} &= \frac{R_\rho}{R_{\rho_u} + T_\rho} \,.\, 16\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{l^2_\varepsilon l^2_\rho}{R_{\rho_u} + T_\rho} \frac{1}{\lambda^2 r^2} I^2_{\varepsilon\,\text{eff}}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Le rendement $\eta^{\rho_u}_\rho$ de l'antenne de réception a pour expression

$$\eta^{\rho_u}_\rho = \frac{R_{\rho_u}}{R_{\rho_u} + T_\rho}. \qquad (25)$$

Cas où la résistance utile est grande par rapport à la résistance T_ρ de pertes. — *15.* Alors

$$P_{\rho\,\text{moy}} = P_{\rho_u\,\text{moy}} = 16\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{l^2_\varepsilon l^2_\rho}{R_{\rho_u}} \frac{1}{\lambda^2 r^2} I^2_{\varepsilon\,\text{eff}} \qquad (26)$$

$$\eta^{\rho_u}_\rho = 1. \qquad (27)$$

Cas où la résistance utile est petite par rapport à la résistance $T\rho$ de pertes. — *16.* Alors

$$P\rho_{\text{moy}} = 16\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{l_\varepsilon^2 l_\rho^2}{T\rho} \frac{1}{\lambda^2 r^2} I_{\varepsilon\,\text{eff}}^2 \tag{28}$$

$$P\rho_{u\,\text{moy}} = \frac{R\rho_u}{T\rho} \cdot 16\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{l_\varepsilon^2 l_\rho^2}{T\rho} \frac{1}{\lambda^2 r^2} I_{\varepsilon\,\text{eff}}^2 \tag{29}$$

$$\eta_\rho^{\rho_u} = \frac{R\rho_u}{T}.$$

Si les pertes sous forme de chaleur sont négligeables par rapport à l'énergie utilisée :

$$P\rho_{u\,\text{moy}} = P\rho_{j\,\text{moy}} \qquad R\rho = R\rho_u$$
$$P\rho_{p\,\text{moy}} = P\rho_{r\,\text{moy}} \qquad T\rho = S\rho\omega^2$$

ou, en remplaçant $S\rho$ et ω par leurs valeurs :

$$S\rho = \frac{4}{3}\, l_\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon\mu}\, \mu$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$P\rho_{\text{moy}} = 3\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, l_\varepsilon^2 \frac{1}{r^2} I_{\varepsilon\,\text{eff}}^2 \tag{30}$$

$$P\rho_{j\,\text{moy}} = \frac{9}{16\pi^2} R\rho \frac{l_\varepsilon^2}{l_\rho^2} \frac{\lambda^2}{r^2} I_{\varepsilon\,\text{eff}}^2 \tag{31}$$

$$\eta_\rho^{\rho_j} = \frac{R\rho}{S\rho\omega^2} = \frac{3}{16\pi^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, R\rho \frac{\lambda^2}{l_\rho^2}. \tag{32}$$

Cas de l'énergie utilisée maxima. — *17.* On a, dans ce cas

$$R\rho_u = T \qquad \eta_\rho^{\rho_u} = \frac{1}{2} \tag{33}$$

et, si les pertes sous forme de chaleur sont négligeables par rapport à l'énergie utile :

$$P\rho_{\text{moy}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, l_\varepsilon \frac{1}{r^2} I_{\varepsilon\,\text{eff}}^2 \tag{34}$$

$$P\rho_{j\,\text{moy}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, l_\varepsilon^2 \frac{1}{r^2} I_{\varepsilon\,\text{eff}}^2 \tag{35}$$

Rendement de la radiocommunication. — *18.* On peut considérer les différents rendements suivants :

$$\eta_{\varepsilon}^{\rho} = \frac{P_{\rho \text{ moy}}}{P_{\varepsilon \text{ moy}}} = \frac{\text{Energie soustraite au champ émetteur}}{\text{Energie dépensée dans l'antenne d'émission}}$$

$$\eta_{\varepsilon}^{\rho_u} = \frac{P_{\rho_u \text{ moy}}}{P_{\varepsilon \text{ moy}}} = \frac{\text{Energie utilisable à la réception}}{\text{Energie dépensée dans l'antenne d'émission}}$$

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho} = \frac{P_{\rho \text{ moy}}}{P_{\varepsilon r \text{ moy}}} = \frac{\text{Energie soustraite au champ émetteur}}{\text{Energie rayonnée par l'émetteur}}$$

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho_u} = \frac{P_{\rho_u \text{ moy}}}{P_{rr \text{ moy}}} = \frac{\text{Energie utilisable à la réception}}{\text{Energie rayonnée par l'émetteur}}$$

Pour avoir l'expression de ces rendements dans les différents cas envisagés ci-dessus, il faut prendre, pour chaque valeur du numérateur, successivement les valeurs des dénominateurs correspondant aux cas étudiés. On obtient ainsi, pour les différents rendements, les valeurs portées dans les tableaux ci-dessous. Tableaux 3 et 4 hors texte.

Comme dans le cas des radiocommunications par oscillateurs, tous ces rendements sont inversements proportionnels au carré de la distance des antennes, et aux résistances (radiances comprises) de celles-ci. Ils sont proportionnels aux carrés de leurs hauteurs.

Si la résistance est grande par rapport à la radiance, ils varient en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

Si au contraire on suppose les radiances grandes par rapport aux résistances les rendements augmentent en même temps que la longueur d'onde.

Dans le cas où l'énergie émise et l'énergie captée sont maxima ($R = S\omega^2$), *les rendements sont indépendants des hauteurs des antennes ; ils sont proportionnels au carré de la longueur d'onde.*

Portée de la radiocommunication. — *19.* Si P_{ρ_u} est la puissance nécessaire et suffisante pour que les signaux soient reçus, la portée est déterminée, connaissant l'expression, soit de la puissance totale dépensée dans l'antenne de transmission, soit de la puissance rayonnée par l'émetteur, en résolvant par rapport à r les équations

$$\eta_{\varepsilon}^{\rho_j} = \frac{P_{\rho_u \text{ moy}}}{P_{\varepsilon \text{ moy}}} = K_{\varepsilon}^{\rho_u} \frac{1}{r^2} \tag{36}$$

ou

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho_u} = \frac{P_{\rho_u \text{ moy}}}{P_{\varepsilon r \text{ moy}}} = K_{\varepsilon r}^{\rho_u} \frac{1}{r^2} \tag{37}$$

NICATION.

champ incident

port à T_p $l^2_{c\,eff}$	$R_{pu} = $ $8\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{l_c^2\, l_p^2}{T_p\, \lambda}$
$\frac{1}{\lambda^2 r^2}$	$8\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{l_c^2}{R_c, S_{c\omega}}$
$\frac{1}{\lambda^2 r^2}$	$8\pi^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{l_c^2}{R_c\, T}$
	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{l_p^2}{T_p}$
	$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{l_p^2}{T_p}$
	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$







UNICATION.

vant l'énergie u

champ émetteur

pport à $S_\rho\omega^2$ ... eff	$R_\rho = S_\rho$ ... $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, l_e^2\, \frac{1}{r^2}\, I$ ...
$\omega^2\, \frac{1}{r^2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \frac{l_e^2}{R_e + S_e}$ ...
$\frac{1}{r^2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \frac{l_e^2}{R_e}$ ...
$\frac{\lambda^2}{r^2}$	$\frac{9}{32}$ ...
$\frac{\lambda^2}{r^2}$	$\frac{9}{64}$ ...
$\frac{\lambda^2}{r^2}$	$\frac{9}{32}$ ...
	1

On a, par exemple dans le cas où, pour les deux antennes

$$R = S\omega^2$$

(On suppose, dans l'antenne de réception, les pertes sous forme de chaleur négligeables par rapport à l'énergie utile).

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho_u} = \frac{P_{\rho_u \, moy}}{P_{\varepsilon r \, moy}} = \frac{9}{64\pi^2}\frac{\lambda^2}{r^2} \qquad (38)$$

d'où

$$r = \frac{3}{8\pi}\lambda\sqrt{\frac{P_{\varepsilon r \, moy}}{P_{\rho_u, moy}}}.$$

Dans ce cas, qui est celui de la puissance maxima qui puisse être captée au champ émetteur avec une antenne de radiance donnée, on voit que la portée de la radiocommunication est proportionnelle :

1° A la longueur d'onde émise ;

2° A la racine carrée de l'énergie rayonnée ou, ce qui revient au même, à l'intensité dans l'antenne de transmission ;

3° Elle est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'énergie nécessaire pour la réception des signaux.

Si l'on admet par exemple pour $P_{ru \, moy}$ la valeur 4.10^{-6} watts qui correspond à une déviation de 80 millimètres environ du spot du thermogalvanomètre sur une échelle placée à la distance d'un mètre de l'instrument, les portées sont données par le tableau de la page 137.

Si l'on admet pour $P_{rj \, moy}$ la valeur 100 fois plus petite 4.10^{-8} suffisante pour une bonne réception auditive, les portées seraient dix fois plus grandes.

Oscillations amorties. — *20.* Supposons, ainsi que nous avons fait au § 72, ch. II, l'oscillateur d'émission parcouru par un courant d'intensité

$$\mathfrak{J}_\varepsilon = -I_\varepsilon e^{-\frac{\delta_\varepsilon t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}}\sin\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi + \chi\right) \qquad (40)$$

ψ étant la phase originale de la différence de potentiel, entre la capacité supérieure et la terre, laquelle s'écrit

$$\mathfrak{V}_\varepsilon = \frac{1}{C}\mathfrak{Q}_\varepsilon = \frac{1}{C}\frac{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\pi}I_\varepsilon e^{-\frac{\delta_\varepsilon t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}}\cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi\right) \qquad (41)$$

et tg χ étant égal à

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{a'_\varepsilon}{\omega} = \frac{\delta_\varepsilon}{4\pi}, \qquad (42)$$

l'intensité efficace est

$$I_{\varepsilon\ \text{eff}} = \sqrt{N}\,\frac{I_\varepsilon}{2\sqrt{\alpha_\varepsilon}}. \tag{43}$$

Dans le cas de la décharge oscillante de l'antenne (Emission directe)

$$\psi = -\chi \tag{44}$$

$$\mathfrak{V}_\varepsilon = \frac{1}{C}\,\frac{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\pi}\,I_\varepsilon\,e^{-\frac{\delta_\varepsilon t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}}\cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi\right) \tag{45}$$

$$\mathfrak{J}_\varepsilon = -I_\varepsilon\,e^{-\frac{\delta_\varepsilon t}{\lambda_\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}}}\sin\left(\frac{2\pi t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} + \psi + \chi\right) \tag{46}$$

On suppose dans ce qui suit, les décréments logarithmiques négligeables par rapport à $4\pi^2$.

Champ électromagnétique à grande distance de l'antenne d'émission. — *21*. Les expressions de la force électrique et magnétique sont les mêmes que dans le cas de l'oscillateur Hertzien (§ 73, ch. II), soit (expressions 215 et 216, ch. II) en général

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho &= -2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{2l_\varepsilon}{\lambda}\,\frac{1}{r}\,I_\varepsilon\,\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\,e^{-\frac{\delta_\varepsilon t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi + 2\chi\right] \\
\mathcal{H}_\rho &= -2\pi\,\frac{2l_\varepsilon}{\lambda}\,\frac{1}{r}\,I_\varepsilon\,\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\,e^{-\frac{\delta_\varepsilon t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi + 2\chi\right]
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Dans le cas de l'émission directe, on a :

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho &= -2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{2l_\varepsilon}{\lambda}\,\frac{1}{r}\,I_\varepsilon\,\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\,e^{-\frac{\delta_\varepsilon t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \chi\right] \\
\mathcal{H}_\rho &= -2\pi\,\frac{2l_\varepsilon}{\lambda}\,\frac{1}{r}\,I_\varepsilon\,\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}\,e^{-\frac{\delta_\varepsilon t}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \chi\right]
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Puissance moyenne dépensée dans l'antenne d'émission. Puissance moyenne rayonnée. Rendement de l'antenne d'émission. — *22*. On a encore.

Puissance moyenne dépensée dans l'antenne d'émission :

$$P_{\varepsilon\ \text{moy}} = (R_\varepsilon + S_\varepsilon\omega^2)\,I^2_{\varepsilon\ \text{eff}}. \tag{49}$$

Puissance moyenne rayonnée

$$P_{\varepsilon r\ \text{moy}} = S_\varepsilon\omega^2\,I^2_{\varepsilon\ \text{eff}}. \tag{50}$$

Rendement de l'antenne d'émission

$$\eta_{\varepsilon}^{\varepsilon r} = \frac{S_{\varepsilon}\omega^{2}}{R_{\varepsilon} + S_{\varepsilon}\omega^{2}}. \tag{51}$$

Courant efficace dans l'antenne de réception. — *23.* On obtient par un calcul analogue à celui qui a été fait dans le cas de l'oscillateur de Hertz (§ 75, ch. I)

$$I_{\rho\,\text{eff}} = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{l_{\varepsilon}\,.\,l_{\rho}}{R_{\rho} + S_{\rho}\omega^{2}}\,\frac{1}{\lambda r}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_{\varepsilon}}{\alpha_{\rho}}}}\,I_{\varepsilon\,\text{eff}}. \tag{52}$$

Nous supposons qu'il y a résonance entre les antennes de réception et d'émission

$$\omega_{\varepsilon} = \omega_{\rho} = \omega.$$

Si ψ est quelconque, cette valeur de $I_{\rho\,\text{eff}}$ doit être multipliée par le terme de correction

$$\sqrt{1 + \sin 2\,(\psi + 2\chi)}. \tag{53}$$

Dans le *cas de l'émission directe* ($\psi = -\chi$), il n'y a pas à tenir compte du facteur de correction, qui est égal à un, à des termes négligeables près.

L'expression (52) ne diffère de l'expression correspondante (19) obtenue dans le cas des oscillations entretenues, que par le facteur

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_{\varepsilon}}{\alpha_{\rho}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta_{\varepsilon}}{\delta_{\rho}}}}$$

facteur qui représente l'effet de l'amortissement.

En unités électromagnétiques CGS

$$I_{\rho\,\text{eff}} = 4\pi\Omega\,\frac{l_{\varepsilon}l_{\rho}}{R_{\rho} + S_{\rho}\omega^{2}}\,\frac{1}{\lambda r}\,I_{\varepsilon\,\text{eff}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_{\varepsilon}}{\alpha_{\rho}}}} \quad \text{(unités électromagnétiques CGS).} \tag{54}$$

En unités pratiques

$$I_{\rho\,\text{eff}} = 120\pi\,\frac{l_{\varepsilon}l_{\rho}}{R_{\rho} + S_{\rho}\omega^{2}}\,\frac{1}{\lambda r}\,I_{\varepsilon\,\text{eff}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_{\varepsilon}}{\alpha_{\rho}}}} \quad \text{(unités pratiques)} \tag{55}$$

Puissance moyenne soustraite au champ incident. Puissance utilisable à la réception. Rendement de la réception.— *24.* On a, encore, comme aux §§ 57, ch. II et 13, ch. III.

Puissance moyenne soustraite au champ émetteur

$$P_{\rho\ \mathrm{moy}} = (R_{\rho_u} + T_\rho)\, I^2_{\rho\ \mathrm{eff}}. \tag{56}$$

Puissance moyenne utilisable à la réception

$$P_{\rho_u\ \mathrm{moy}} = R_{\rho_u}\, I^2_{\rho\ \mathrm{eff}}. \tag{57}$$

Rendement de la réception

$$\eta_\rho^{\rho_u} = \frac{R_{\rho_u}}{R_{\rho_u} + T_\rho}.$$

Rendement de la radiocommunication. — *25.* On peut encore considérer les différents rendements suivants :

$$\eta_\varepsilon^\rho = \frac{P_{\rho\ \mathrm{moy}}}{P_{\varepsilon\ \mathrm{moy}}} = \frac{\text{Energie soustraite au champ émetteur}}{\text{Energie dépensée dans l'antenne d'émission}}$$

$$\eta_\varepsilon^{\rho_u} = \frac{P_{\rho_u\ \mathrm{moy}}}{P_{\varepsilon\ \mathrm{moy}}} = \frac{\text{Energie utilisable à la réception}}{\text{Energie dépensée dans l'antenne d'émission}}$$

$$\eta_{\varepsilon r}^\rho = \frac{P_{\rho\ \mathrm{moy}}}{P_{\varepsilon r\ \mathrm{moy}}} = \frac{\text{Energie soustraite au champ émetteur}}{\text{Energie émise}}$$

$$\eta_{\varepsilon r}^{\rho_u} = \frac{P_{\rho_u\ \mathrm{moy}}}{P_{\varepsilon r\ \mathrm{moy}}} = \frac{\text{Energie utilisable à la réception}}{\text{Energie émise}}$$

Les expressions de ces divers rendements sont les mêmes que celles qui ont été trouvées au § 18 dans le cas des ondes entretenues, multipliées toutefois par

$$\frac{1}{1 + \dfrac{\delta_\varepsilon}{\delta_\rho}}.$$

L'emploi des oscillations amorties a donc comme conséquence une diminution du rendement de la radiocommunication.

B. Antennes de formes et de dimensions quelconques. — *26.* Il est facile d'étendre les résultats de la théorie précédente, dans laquelle on suppose l'antenne de dimensions infiniment petites par rapport à la longueur d'onde, au cas d'antennes de toutes dimensions.

1° Expressions du champ électromagnétique. — *27.* Nous avons, dans le cas d'une antenne verticale de longueur dl infiniment petite mise à la terre, ou située au voisinage de la terre, et pour des ondes non amorties,

les expressions suivantes du champ électromagnétique à grande distance (7) :

$$\left\{\begin{aligned} d\mathcal{E} &= 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{dl}{\lambda}\,\frac{\mathrm{I}}{r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)\cos\varphi \\ d\mathcal{M} &= 4\pi\,\frac{dl}{\lambda}\,\frac{\mathrm{I}}{r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)\cos\varphi \end{aligned}\right.$$

a) **Antennes rectilignes verticales.** — *28.* Supposons maintenant avoir affaire à une antenne rectiligne, de dimensions finies, parcouru par un courant non amorti, dont l'amplitude I varie suivant le point considéré sur l'oscillateur. Le champ produit à grande distance par un élément dl de l'antenne est donné par les expressions ci-dessus. Il est perpendiculaire au rayon vecteur et situé dans le plan méridien pour le champ électrique, perpendiculaire au plan méridien pour le champ magnétique ; sa direction est indépendante de l'élément considéré, si l'on suppose la distance suffisamment grande par rapport aux dimensions de l'antenne. Le champ résultant produit par l'antenne entière est donc la somme algébrique des champs élémentaires. Au voisinage de la surface du sol, $\cos\varphi = 1$, et l'on a :

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E} &= 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{1}{\lambda r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)\int \mathrm{I}dl \\ \mathcal{M} &= 4\pi\,.\,\frac{1}{\lambda r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-r\right)\int \mathrm{I}dl \end{aligned}\right.$$

les intégrales étant étendues à toute la longueur de l'oscillateur.

L'amplitude du champ électromagnétique a pour expressions

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E} &= 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{1}{\lambda r}\int \mathrm{I}dl \\ \mathrm{M} &= 4\pi\,.\,\frac{1}{\lambda r}\int \mathrm{I}dl. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

b) **Antennes quelconques.** — *29.* Considérons d'abord un élément de courant AB de longueur très petite dl, incliné sur la verticale d'un angle θ et placé à proximité de la terre, et cherchons le champ électromagnétique à grande distance r, en un point P placé dans l'atmosphère, très près de la surface de la terre.

Prenons comme plan des xy la surface de la terre, et supposons l'axe des x dirigé vers le point P.

D'après la théorie de A. Blondel, que nous avons donnée plus haut, le

champ électromagnétique en P sera le même que celui de l'élément AB, et de son symétrique A'B' par rapport à la surface du sol, la terre étant supprimée.

L'élément de courant AB produit en P un champ électrique d'amplitude égale à

$$dE_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} I \times AB \sin \theta$$

θ étant l'angle qui fait l'élément de courant AB avec la direction du point P.

Projetons l'élément AB en A_1B_1 sur le plan des yz, on a (fig. 90) :

$$AB \sin \theta = A_1B_1$$

et

$$dE_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} I \,.\, A_1B_1$$

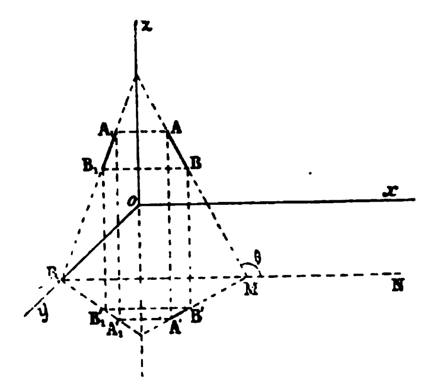


Fig. 90.

Ce champ électrique en P est d'ailleurs perpendiculaire à la direction OP et parallèle au plan passant par AB et parallèle à OP. Il peut donc être représenté par un vecteur PQ_1 de grandeur dE_1, parallèle à B_1A_1.

De même le champ électrique dE_2 produit en P par l'élément A'B' pourra être représenté par un vecteur PQ_2, de grandeur

$$dE_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} I \,.\, A'_1B'_1$$

et parallèle à la projection $A'_1B'_1$ de l'élément A'B' sur le plan des yz.

Le champ électrique en P dû à l'ensemble des éléments AB, A'B' est la résultante PQ des deux vecteurs PQ_1 et PQ_2.

Soit

$$[PQ] = .\, [dE_1 + dE_2] = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} I \,.\, [B_1A_1 + A'_1B'_1]$$

Les expressions de la forme [R + S] désignant la résultante des deux vecteurs R et S.

Mais B_1A_1 et $A'_1B'_1$ étant les projections sur le plan des yz de deux vecteurs BA, A'B' tels que AB et A'B' soient symétriques par rapport au plan des xy, on a :

$$[B_1A_1 + A'_1B'_1] = [BA + A'B'].$$

La résultante [BA + A'B'] est un vecteur parallèle à $0z$ et égal à

$$2 \, . \, AB \, . \cos \psi$$

ψ étant l'angle de AB et de $0z$.

Le champ électrique en P est donc un vecteur PQ, perpendiculaire au plan des xy, et d'amplitude

$$dE = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} \, . \, dl \, . \, I$$

en appelant dl la projection de l'élément AB sur la verticale.

Le couple de vecteurs AB, A'B' étant équivalent à l'élément AB supposé placé seul dans le diélectrique au voisinage du sol, le vecteur PQ représente également le champ dû à l'élément AB seul, placé au voisinage du sol.

On peut généraliser ce résultat de plusieurs façons.

1° Antennes à un seul fil. — *30.* Considérons une antenne à un seul fil DE (fig 91).

Soit AB un élément de l'antenne, A_1B_1, sa projection, de longueur dl, sur la verticale OD, I l'intensité du courant qui traverse l'élément AB.

Le champ électromagnétique à grande distance, au voisinage du sol, dû à l'élément AB, est un vecteur PQ, vertical, et dont l'amplitude est

$$\begin{cases} dE = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} \, I dl \\ dM = 4\pi \frac{1}{\lambda r} \, I dl. \end{cases}$$

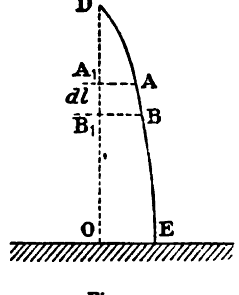


Fig. 91.

Soit l la hauteur totale de l'antenne, on aura pour l'amplitude (E, M), du champ électromagnétique dû à l'antenne tout entière

$$E = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} \int_0^l I dl$$

$$M = 4\pi \frac{1}{\lambda r} \int_0^l I dl.$$

2° Antennes à plusieurs fils. — *31.* Si l'antenne est à plusieurs branches (fig. 92), soient AB, FG, KL, ... les éléments compris entre deux plans horizontaux très voisins R et S. Ces éléments ont tous même projection, A_1B_1, de longueur dl, sur la verticale. Soient i_1, i_2, i_3 ..... les amplitudes des courants dans les différentes branches. On a, pour les am-

plitudes des champs électromagnétiques dus aux différents éléments AB, FG, KL .....

$$dE_1 = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} i_1 dl$$

$$dE_2 = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} i_2 dl.$$

. . . .

Le champ électrique dû à l'ensemble des éléments est dE

$$dE = dE_1 + dE_2 + \ldots = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} dlI$$

I désignant la somme des courants dans les différentes branches.

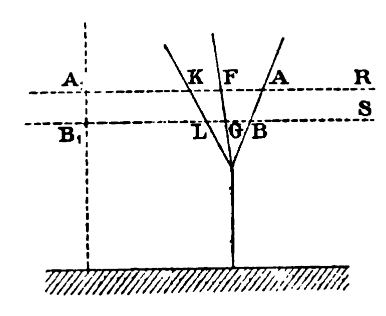


Fig. 92.

Et l'on a, pour toute la longueur de l'antenne

$$\begin{cases} E = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} \int_0^l Idl \\ M = 4\pi \frac{1}{\lambda r} \int_0^l Idl. \end{cases}$$

Différentes formes du résultat obtenu. — *32.* Nous obtenons ainsi, d'une façon générale, quelles que soient la forme et les dimensions de l'antenne, les expressions

$$\left.\begin{aligned} E &= 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} \int_0^l Idl \\ M &= 4\pi \frac{1}{\lambda r} \int_0^l Idl \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

où I représente la somme des amplitudes des courants dans tous les

éléments de l'antenne compris entre deux plans horizontaux très voisins distants de dl. l représente la hauteur totale de l'antenne.

Il y a toutefois lieu de remarquer que le calcul fait ci-dessus ne s'applique qu'au cas où les dimensions de l'antenne, dans le sens horizontal, sont petites par rapport à la longueur d'onde.

Le résultat représenté par les équations (58) peut être interprété de façons diverses.

33. — 1° Soit I_{moy} *l'amplitude moyenne du courant I le long de l'antenne.* On a, par définition

$$I_{moy} \cdot l = \int I dl$$

et

$$\left.\begin{aligned} E &= 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} l\, I_{moy} \\ M &= 4\pi \cdot \frac{1}{\lambda r} l\, I_{moy}. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

2° Soit I_{max} *la valeur maxima de l'amplitude I du courant.* On peut écrire

$$I_{moy} = \alpha\, I_{max}$$

α étant inférieur à l'unité, et

$$\left.\begin{aligned} E &= 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} l\alpha\, I_{max} \\ M &= 4\pi \frac{1}{\lambda r} l\alpha\, I_{max}. \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

La valeur de α dépend du régime de vibration de l'antenne. Nous étudierons cette question dans la suite, mais il est intéressant d'indiquer dès maintenant les valeurs de α qui correspondent à quelques distributions simples du courant.

Si *l'amplitude du courant est la même tout le long de l'antenne :*

$$\alpha = 1. \qquad (61)$$

C'est le cas d'antennes à grande capacité au sommet (§ 5 et suiv.).

Si *la courbe de distribution du courant le long de l'antenne est une droite :*

$$I = I_{max}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \qquad (62)$$

x étant la distance à la prise de terre :

$$\alpha = \frac{\frac{1}{l}\int_0^l I dx}{I_{max}} = \frac{1}{2}. \qquad (63)$$

Si *la distribution du courant est sinusoïdale*

$$I = I_{max} \cos \frac{\pi x}{2l} \qquad (64)$$

$$a = \frac{\frac{1}{l}\int_0^l I dx}{I_{max}} = \frac{2}{\pi}. \qquad (65)$$

3° On peut poser :

$$al = h_{eff} \qquad (66)$$

h_{eff} désignant ce qu'on appelle *la hauteur efficace de l'antenne*, et l'on a :

$$\left.\begin{aligned} E &= 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} l_{eff} I_{max} \\ M &= 4\pi \frac{1}{\lambda r} l_{eff} I_{max}. \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

On a :

Si l'amplitude I du courant est la même tout le long de l'antenne :

$$l_{eff} = l. \qquad (68)$$

Si la distribution est sinusoïdale, avec ventre à la prise de terre et nœud du sommet :

$$l_{eff} = \frac{2}{\pi} l. \qquad (69)$$

Si la courbe de distribution du courant est une droite ; avec courant nul à l'extrémité :

$$l_{eff} = \frac{l}{2}. \qquad (70)$$

4° Enfin, les expressions (58) sont susceptibles de l'interprétation géométrique suivante (fig. 93).

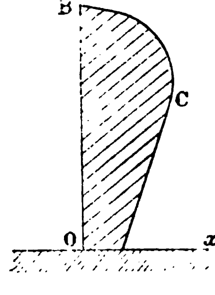
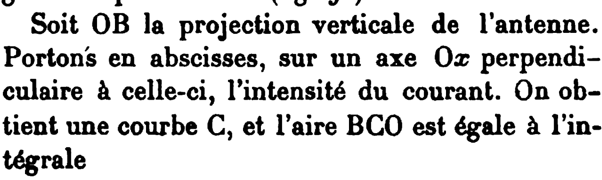
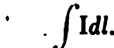


Fig. 93.


Soit OB la projection verticale de l'antenne. Portons en abscisses, sur un axe Ox perpendiculaire à celle-ci, l'intensité du courant. On obtient une courbe C, et l'aire BCO est égale à l'intégrale



$$\int I dl.$$

Elle est donc proportionnelle à l'amplitude du champ électromagnétique produit à grande distance par l'oscillateur. On a

$$\left.\begin{aligned} E &= 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} \times \text{aire BCO} \\ M &= 4\pi \frac{1}{\lambda r} \times \text{aire BCO}. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

REMARQUE. — *34*. La forme que nous avons trouvée au 3°

$$E = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} l_{eff} I_{max}$$

$$M = 4\pi \frac{1}{\lambda r} l_{eff} I_{max}$$

est exactement la même que celle qui a été donnée dans le cas des antennes à grande capacité terminale

$$\begin{cases} E = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda r} lI \\ M = 4\pi \frac{1}{\lambda r} lI. \end{cases}$$

Nous pourrons donc toujours employer ces dernières expressions d'une façon générale, à condition de nous rappeler que si l'amplitude I du courant n'est pas la même tout le long de l'antenne. I représentera l'amplitude maxima, et l la hauteur efficace de l'antenne.

2° Radiance. — *35*. Nous aurons, en particulier, pour la radiance ; la même expression qu'au § 6

$$S\omega^2 = 160\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2}$$

l étant la hauteur efficace.

3° Energie rayonnée. — *36*. On aura :

$$P_r = S\omega^2 I_{eff}^2.$$

I_{eff} étant la valeur maxima de l'intensité efficace le long de l'antenne.

4° Courant dans l'antenne de réception. — *37*. On a, dans le cas de la résonance :

$$I_{\rho\,eff} = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{l_\varepsilon l_\rho}{R_\rho + S_\rho\omega^2} \frac{1}{\lambda r} I_{\varepsilon\,eff}.$$

Dans cette expression les lettres ont les significations suivantes :

$I_{\rho\,eff}$ Courant efficace maximum dans l'antenne de réception
$I_{\varepsilon\,eff}$ Courant efficace maximum dans l'antenne d'émission
$S_\rho\omega^2$ Radiance, définie comme au 2°
λ Longueur d'onde
r Distance des deux stations
R_ρ Résistance efficace, définie comme il suit :

Soit $r_j dl$ la résistance d'un élément d'antenne compris entre deux plans horizontaux distants de dl, soit i_j le courant qui le traverse. L'énergie perdue en chaleur dans tous les éléments compris entre les mêmes plans est :

$$\Sigma r_j i^2_{eff}\, dl$$

et, pour toute la hauteur de l'antenne :

$$\int_0^l r_j i^2_{eff}\, dl.$$

On pose

$$RI^2_{eff} = \int_0^l dl r_j i^2_{eff}$$

I_{eff} étant le courant efficace maximum le long de l'antenne, R représente ce qu'on appelle la *résistance efficace*.

Dans le cas des oscillations amorties, on a :

$$I\rho_{eff} = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{l_t l\rho}{R\rho + S\rho\omega^2} \frac{1}{\lambda r} I_{eff} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}}}.$$

5° Rendement. — *38*. Les expressions du rendement sont également les mêmes que celles que nous avons données aux §§ 18 et 25.

Cas a envisager pour les applications pratiques. — *39*. Nous considérerons successivement le cas de la réception et celui de l'émission.

Dans le cas de la réception, le dispositif détecteur et enregistreur est intercalé à la base de l'antenne, soit directement, soit par l'intermédiaire d'un transformateur, la résistance de l'antenne est ainsi augmentée d'une quantité qui est la plupart du temps de l'ordre de plusieurs ohms au moins. La résistance de la terre est elle-même, dans le cas des stations terrestres supérieure à 1 ohm. La résistance ohmique de l'antenne dépend de la construction de celle-ci. Supposons, pour fixer les idées, obtenir ainsi, en tout, le chiffre de 25 ohms. Le tableau que nous avons donné montre que, si

$$\lambda > 40 l$$

on a

$$R > 25 . S\omega^2.$$

On voit donc que, la longueur d'onde augmentant, la radiance devient rapidement très petite par rapport à la résistance. Si celle-ci est supposée constante en première approximation, le terme

$$R + S\omega^2$$

sera alors à peu près constant, et le terme $S\omega^2$ pourra être négligé.

Dans le cas de l'émission, il n'y a plus de détecteur, et, la résistance ohmique de l'antenne pouvant être diminuée autant qu'on veut, le terme le plus important dans la résistance provient, du moins pour les stations terrestres, de la prise de terre.

Soit par exemple R = 2,5 ohms : pour

$$\lambda > 126\,h$$

on a

$$R > 25 \cdot S\omega^2$$

et l'on voit, pour les grandes longueurs d'onde la résistance sera grande par rapport à la radiance. Mais il n'en est pas toujours ainsi et il faudra retenir, dans la plupart des cas les deux termes de la somme

$$R_\varepsilon + S_\varepsilon\omega^2.$$

Application numérique. **Données. — *40.***

Emission

Puissance moyenne fournie à l'antenne...	$P_{\varepsilon,moy}$	=	10 kilowatts
Hauteur efficace de l'antenne............	l_ε	=	100 mètres
Résistance ohmique et prise de terre.....	R_ε	=	2 ohms

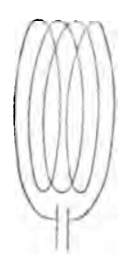
Réception

Hauteur efficace de l'antenne...........	l_ρ	=	50 mètres
Résistance du détecteur (supposée grande par rapport aux autres)...............	R_ρ	=	25 ohms.

Le tableau suivant donne les résultats pour 3 longueurs d'ondes, dans le cas d'oscillations entretenues.

	$\lambda = 1\,000$ m.	$\lambda = 5\,000$ m	$\lambda = 10\,000$ m.
Puissance moyenne fournie à l'antenne : P_{ε} moy ... watts	10 000	10 000	10 000
Radiance : $S_{\varepsilon}\omega^2$ ... ohms	16	0,64	0,16
$R_{\varepsilon} + S_{\varepsilon}\omega^2$ ... ohms	18	2,64	2,16
Rendement de l'antenne d'émission $\eta_{\varepsilon}^{\varepsilon r} = \dfrac{S_{\varepsilon}\omega^2}{R_r + S_{\varepsilon}\omega^2}$ ...	0,889	0,242	0,0741
Puissance moyenne rayonnée : $P_{\varepsilon r}$ moy. watts	8 890	2 420	741
Courant efficace dans l'antenne d'émission : I_{ε} eff ... ampères	23,6	61,5	68
Radiance de l'antenne de réception : $S_{\rho}\omega^2$. ohms	4	0,16	0,04
$R_{\rho} + S_{\rho}\omega^2$ ... ohms	29	25,16	25,04
Courant efficace dans l'antenne de réception, à 1 000 kilomètres de distance : I_{ρ} eff. ...	$15,3 \times 10^{-4}$	$9,22 \times 10^{-4}$	$5,11 \times 10^{-4}$
Energie soustraite au champ incident : P_{ρ}. watts	$67,8 \times 10^{-6}$	$21,4 \times 10^{-6}$	$6,54 \times 10^{-6}$
Energie utilisée à la réception : P_{ρ_u} ... watts	$58,5 \times 10^{-6}$	$21,3 \times 10^{-6}$	$6,52 \times 10^{-6}$
Rendement de l'antenne de réception $\eta_{\rho}^{\rho j} = \dfrac{R_{\rho}}{R_{\rho} + S_{\rho}\omega^2}$ ...	0,86	0,99	1,00
Portée, en supposant une énergie égale à 4.10^{-8} watts nécessaire et suffisante pour la réception ... kilomètres	38 000	23 000	13 000

2° **Radiocommunications par cadres fermés.** — *41*. Supposons maintenant l'antenne remplacée par un cadre fermé de résistance R, de capacité C, et de self L, composé de k tours identiques mis en série. Dans l'étude de principe que nous faisons ici, nous supposerons la longueur totale du fil petite par rapport à la longueur d'onde, de sorte qu'on puisse considérer l'intensité du courant comme constante tout le long du conducteur. On obtiendra ce résultat dans le cas, très important en pratique, où les deux extrémités du fil sont réunies aux armatures d'un condensateur (fig. 94).


Fig. 94.

Nous avons vu qu'un tel cadre placé au voisinage de la terre est assimilable à un système formé de ce cadre et de son symétrique par rapport à la terre, supposés dans un diélectrique indéfini.

Nous supposerons la distance du cadre à la terre petite par rapport à la longueur d'onde. Dans ces conditions, le système du cadre A et de son symétrique B par rapport à la terre est assimilable, au point de

vue des actions à grande distance, à un seul cadre C de surface $2k\Sigma$, Σ étant la surface totale de chacun des cadres, et K le nombre de spires.

Rayonnement des cadres fermés. — *42.* Le cadre C, de surface $2nS$, placé dans un diélectrique, rayonnerait, ainsi que nous l'avons vu (ch. II, § 41), une puissance moyenne égale à

$$\frac{2}{3}\sqrt{\mu^6\varepsilon^3}\,\omega^4\,(2\,K)^2\Sigma^2\,I_{eff}^2$$

Le cadre unique A, placé au voisinage de la terre, rayonne une puissance moitié moindre, soit

$$\begin{aligned} P_{r\ moy} &= \frac{4}{3}\sqrt{\varepsilon^3\mu^6}\,\omega^4K^2\Sigma^2\,I_{eff}^2 \\ &= T\omega^4\,I_{eff}^2 \end{aligned}$$

avec

$$T = \frac{4}{3}\sqrt{\varepsilon^3\mu^6}\,K^2\Sigma^2$$

$$T\omega^4 = T\left(\frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)^4 = \frac{64}{3}\pi^4\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{K^2\Sigma^2}{\lambda^4}.$$

En unités électromagnétiques CGS :

$$T\omega^4 = \frac{64}{3}\pi^4\Omega\,\frac{K^2\Sigma^2}{\lambda^4}.$$

En unités pratiques CGS :

$$T\omega^4 = 640\pi^4\,\frac{K^2\Sigma^2}{\lambda^4}\ \text{ohms}.$$

Oscillations entretenues. Émission. Champ électromagnétique à grande distance. — *43.* Les expressions de la force électrique et de la force magnétique en un point P, situé à grande distance du transmetteur, en un point de la surface de la terre ou à son voisinage, sont les mêmes que pour un cadre de surface $2\,K\Sigma$ supposé isolé dans un diélectrique, soit, pour les valeurs efficaces (ch. II, § 41)

$$\left\{\begin{aligned} E_{\rho\ eff} &= \frac{8\pi^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{1}{r}\,K\Sigma\cos\theta\,I_{\varepsilon\ eff} \\ M_{\rho\ eff} &= \frac{8\pi^2}{\lambda^2}\,\frac{1}{r}\,K\Sigma\cos\theta\,I_{\varepsilon\ eff}. \end{aligned}\right.$$

Dans cette expression θ représente l'angle du rayon vecteur qui joint le point P à l'origine avec le plan du cadre.

Un cadre transmetteur est donc un système dirigé : A une distance donnée, le long de la surface de la terre, le champ électromagnétique est maximum dans le plan du cadre, nul dans le plan perpendiculaire. Le diagramme qui représente, en coordonnées polaires, la valeur du champ électromagnétique en fonction de l'angle θ, se compose de deux cercles tangents à l'origine, et dont les centres sont sur la droite $\theta = 0$ (fig. 95).

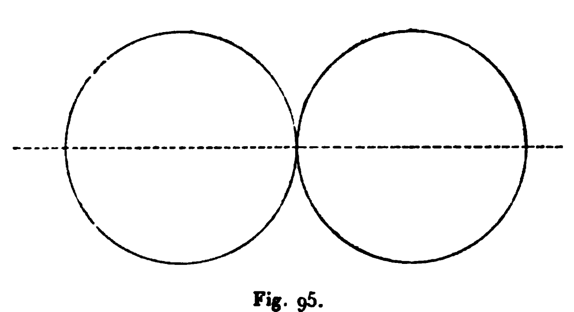


Fig. 95.

En unités électromagnétiques

$$E_{\rho \text{ eff}} = 8\pi^2\Omega \frac{1}{r} \frac{K\Sigma}{\lambda^2} \cos\theta \, I_{\varepsilon \text{ eff}}$$

$$M_{\rho \text{ eff}} = 8\pi^2 \frac{1}{r} \frac{K\Sigma}{\lambda^2} \cos\theta \, I_{\varepsilon \text{ eff}}.$$

En unités pratiques, $I_{\varepsilon \text{ eff}}$ étant exprimé en ampères, et les longueurs en centimètres

$$E_{\rho \text{ eff}} \text{ (volts/centimètre)} = 240\,\pi^2 \frac{1}{r} \frac{K\Sigma}{\lambda^2} \cos\theta \, I_{\varepsilon \text{ eff}} \text{ (amp.)}.$$

Energie rayonnée. Energie dépensée en chaleur. Rendement. — 44. On a : pour
la puissance moyenne rayonnée

$$P_{\varepsilon r \text{ moy}} = T_\varepsilon \omega^4 \, I^2_{\varepsilon \text{ eff}}$$

avec

$$T_\varepsilon = \frac{4}{3} \sqrt{\varepsilon^3 \mu^3} \, K^2 \Sigma^2$$

pour *la puissance moyenne dépensée en chaleur dans le cadre* (de résistance R_ε)

$$P_{\varepsilon f \text{ moy}} = R_\varepsilon \, I^2_{\varepsilon \text{ eff}}$$

pour *la puissance moyenne totale dissipée dans le cadre :*

$$P_{\varepsilon \text{ moy}} = (R_\varepsilon + T_\varepsilon \omega^4) \, I^2_{\varepsilon \text{ eff}}.$$

Le *rendement du cadre* est :

$$\eta_{\varepsilon}^{\varepsilon r} = \frac{T_{\varepsilon}\omega^4}{R_{\varepsilon} + T_{\varepsilon}\omega^4}.$$

Réception. — *45*. Considérons un cadre fermé, de K tours en série de surface S, vertical, servant à la réception, et placé dans un champ électromagnétique $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, le champ électrique étant vertical.

La force électromotrice induite est, ainsi que nous l'avons vu (ch. II, § 93)

$$\mathfrak{V} = \mathrm{E}\,\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right)\mathrm{K}\Sigma\cos\theta$$

r étant la distance de la station d'émission.

Le cadre se comporte comme un circuit de capacité C, de résistance $R + T\omega^4$, de self-induction L.

On a donc, comme aux (§§ 91, 92, 93, ch. II).

Courant dans le cadre. — *46*

$$\mathfrak{I} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{K}\Sigma\cos\theta\,\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{(R + T\omega^4)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r - \gamma\right)$$

avec

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + T\omega^4}$$

$$I_{eff} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{K}\Sigma\cos\theta\,\frac{E_{eff}}{\sqrt{(R + T\omega^4)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Dans le cas de la résonance. — *47*

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\mathfrak{I} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{K}\Sigma\cos\theta\,\frac{\mathrm{E}}{R + T\omega^4}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r - \gamma\right)$$

$$I_{eff} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{K}\Sigma\cos\theta\,\frac{E_{eff}}{R + T\omega^4}.$$

Puissance soustraite au champ incident. Puissance utilisable. Rendement. — *48*. En supposant l'énergie perdue par résistance ohmique négligeable par rapport à l'énergie utilisable. On a. *Puissance utilisable à la réception.*

$$P_j = RI_{eff}^2.$$

Puissance soustraite au champ émetteur

$$P = (R + T\omega^4)\, I_{eff}^2 .$$

Rendement de la réception

$$\eta_{\rho}^{\rho j} = \frac{R}{R + T\omega^4}.$$

Réception sur condensateur. — Supposons que, le cadre étant muni d'un condensateur de capacité C, comme dans la figure 94, les appareils de réception soient mis aux bornes de ce condensateur. La réception est alors caractérisée par la différence de potentiel $\mathfrak{U}$ entre les deux armentures.

On suppose la capacité C très grande par rapport à la capacité propre du cadre. Si le circuit est réglé à la résonance, on a

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

et

$$\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{I}}{C\omega} = \mathfrak{I} \,.\, L\omega$$

$$U_{eff} = I_{eff} \,.\, L\omega$$

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \,.\, \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \,.\, E_{eff} \,.\, \frac{K\Sigma L}{R + T\omega^4} \,.\, \cos\theta.$$

Le cadre est donc caractérisé par le facteur

$$\frac{K\Sigma L}{R + T\omega^4}.$$

Application à la recherche de la direction du poste émetteur. — *49.* L'intensité de la réception étant proportionnelle au cosinus de l'angle θ que fait le plan du cadre avec la direction de la station d'émission est maxima quand le plan du cadre coïncide avec cette direction, nulle quand il est perpendiculaire. *Le système constitue donc un dispositif dirigé, qui permet de trouver la direction du poste émetteur : si le cadre tourne autour d'un axe vertical, la réception passe alternativement par des maxima et des zéros : les maxima sont tous dans la direetion de la station d'émission.*

Oscillations amorties. — *50.* Soit

$$\mathcal{E} = E \,.\, e^{-\alpha_{\varepsilon} t} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r\right) + \psi\right]$$

le champ incident.

Force électromotrice induite. — *51*. On obtient, comme au (§ 95, ch. II)

$$\mathfrak{V} = E \frac{2\pi}{\lambda} K\Sigma \cos\theta \, e^{-\alpha_\varepsilon t} \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - r + \psi\right).$$

Posons

$$\omega_\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\alpha_\rho = \frac{R + T\omega^4}{2L}$$

$$\omega_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$m = \frac{\omega_\varepsilon + \omega_\rho}{2} \qquad n = \frac{\omega_\varepsilon - \omega_\rho}{2} \qquad \mu = \frac{\alpha_\varepsilon + \alpha_\rho}{2} \qquad \nu = \frac{\alpha_\varepsilon - \alpha_\rho}{2}.$$

Intensité du courant. — *52*. On obtient, dans le cas de la résonance, comme au § 97, ch. II.

$$\mathfrak{I} = Mm \cos(mt + m')$$

avec

$$M^2 = \frac{\left(E \cdot \frac{2\pi}{\lambda} K\Sigma \cos\theta\right)^2}{16 L^2 m^2 (n^2 + \nu^2)} \left\{ T_1 + 2\frac{1 + \cos\psi}{m} T_2 + \frac{2\sin\psi}{m} T_3 \right\},$$

T_1, T_2, T_3 ayant les valeurs spécifiées au § 63, ch. II

$$I_{eff} = \frac{\pi\sqrt{N}\, E \cdot K\Sigma \cos\theta}{\lambda (R + T\omega^4)\sqrt{\alpha_\varepsilon\left(1 + \frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\rho}\right)}}.$$

Remarques sur les applications pratiques des cadres fermés. — *53*. L'énergie émise par un cadre fermé variant comme la quatrième puissance de la longueur d'onde, devient extrêmement petite dès que cette dernière est un peu grande. Aussi les cadres ne sont-ils pas employés à la transmission, sauf dans le cas où l'on a besoin d'obtenir une concentration des ondes dans une direction à favoriser. Nous reviendrons plus tard en détail sur ce cas dans l'étude des systèmes dirigés.

A la réception, l'énergie est également extrêmement faible dès que la longueur d'onde est un peu grande. Mais les cadres ont l'avantage d'éliminer les signaux perturbateurs (atmosphériques ou venant des autres stations d'émission), arrivant dans des directions normales (ou à peu près) à la direction à favoriser. Aussi sont-ils souvent employés, des amplificateurs étant utilisés, si c'est nécessaire, pour renforcer les signaux reçus.

Dans le cas de la pratique ordinaire. (Dimensions du cadre très petites par rapport à la longueur d'onde), la radiance est toujours très petite par rapport à la résistance ohmique et à celle du détecteur.

Le courant dans le cadre récepteur est donc, pour un champ incident d'intensité constante quand la longueur d'onde varie, inversement proportionnel à la longueur d'onde, et l'énergie captée varie comme l'inverse du carré de la longueur d'onde. Il y a donc, dans ce cas, beaucoup plus encore que dans celui des antennes ouvertes, intérêt à employer de grandes fréquences.

Enfin le courant est proportionnel à la première puissance, et l'énergie à la deuxième puissance du nombre de tours et de la surface du cadre.

Nous donnerons, comme nous l'avons fait plus haut, pour le cas des antennes ouvertes, un exemple de l'emploi des cadres fermés à la réception, pour différentes longueurs d'onde.

Le système émetteur sera celui que nous avons considéré plus haut, et qui est caractérisé par les données suivantes :

Emission par antenne verticale :

Puissance moyenne fournie à l'antenne.	P_{ε} moy	=	10 kilowatts
Hauteur efficace de l'antenne	l_{ε}	=	100 mètres
Résistance ohmique et prise de terre.	R_{ε}	=	2 ohms.

La réception sera faite par un cadre à 10 tours, de 10 mètres carrés de surface :

Nombre de tours	K	=	10
Surface du cadre	Σ	=	10 mètres carrés
Résistance du détecteur (supposée grande par rapport aux autres) ...	R_{ρ}	=	25 ohms.

Le tableau suivant donne le résultat du calcul pour 3 longueurs d'ondes, dans le cas d'oscillations entretenues. Pour faciliter la comparaison avec le cas de la réception par antennes ouvertes, nous avons inscrit, à côté des résultats trouvés par le cadre fermé, ceux qui ont été obtenus plus haut pour la réception, à la même distance et avec le même système émetteur, au moyen d'une antenne ouverte de 50 mètres de hauteur.

	$\lambda = 1\,000$ m.		$\lambda = 5\,000$ m.		$\lambda = 10\,000$ m.	
Puissance moyenne fournie à l'antenne d'émission .... watts	10^4		10^4		10^4	
Hauteur efficace de l'antenne d'émission. centimètres	10^4		10^4		10^4	
Radiance de l'antenne d'émission .... ohms	1,6		0,64		0,16	
Résistance de l'antenne d'émission .... ohms	2		2		2	
Résistance + radiance de l'antenne d'émission. ohms	18		2,64		2,16	
Courant efficace dans l'antenne d'émission. ampères	23,6		61,5		68	
Rendement de l'antenne d'émission	0,889		0,242		0,0741	
Puissance moyenne raisonnée .... watts	8 890		2 420		741	
Champ électrique à 1 000 kilomètres de l'antenne d'émission .... volts/centimètres	$8,897 \cdot 10^{-6}$		$4,637 \cdot 10^{-6}$		$2,56 \cdot 10^{-6}$	
	Réception par cadre	Réception par antenne	Réception par cadre	Réception par antenne	Réception par cadre	Réception par antenne
Résistance ohmique du récepteur.......... ohms	25	25	25	25	25	25
Surface (cas du cadre)......... centimètres carrés	10^5	—	10^5	—	10^6	—
Nombre de tours (cas du cadre)..................	10	—	10	—	10	—
Hauteur (cas de l'antenne)......................	—	$5 \cdot 10^3$	—	$5 \cdot 10^3$	—	$5 \cdot 10^3$
Radiance du système récepteur .... ohms	$6,23 \cdot 10^{-4}$	4	$1 \cdot 10^{-6}$	0,16	$6,23 \cdot 10^{8}$	0,04
Résistance + radiance.................. ohms	25	29	25	25,16	25	25,04
Courant dans le système récepteur....... ampères	$1,89 \cdot 10^{-5}$	$15,3 \cdot 10^{-4}$	$2,33 \cdot 10^{-6}$	$9,22 \cdot 10^{-4}$	$6,43 \cdot 10^{7}$	$5,11 \cdot 10^{-4}$
Energie soustraite au champ incident....... watts	$89,2 \cdot 10^{-10}$	$67,8 \cdot 10^{-6}$	$1,36 \cdot 10^{-10}$	$21,4 \cdot 10^{-6}$	$10,33 \cdot 10^{12}$	$6,54 \cdot 10^{-6}$
Energie utilisable à la réception .... watts	$89,2 \cdot 10^{-10}$	$58,5 \cdot 10^{-6}$	$1,36 \cdot 10^{-10}$	$21,3 \cdot 10^{-6}$	$10,33 \cdot 10^{12}$	$6,52 \cdot 10^{-6}$
Rendement de la réception......................	1	0,86	1	0,99	1	1

BIBLIOGRAPHIE

A. Blondel. — *Sur la théorie des antennes dans la télégraphie sans fil. Association française pour l'avancement des sciences*. Nantes, 1898, p. 212.

CHAPITRE IV

CONCLUSIONS

Nous avons obtenu, au cours des chapitres précédents, un certain nombre de résultats fondamentaux, qui sont la base de la théorie et de la pratique des radiocommunications, et qu'il importe de réunir ici tout d'abord, pour nous permettre d'en apprécier l'importance, d'examiner les corrections à leur apporter pour les adapter aux conditions de la pratique, beaucoup moins simples que les cas particuliers que nous avons étudiés, et de déterminer les conditions d'établissement des radiocommunications.

I. — Résumé des résultats obtenus

Rayonnement électromagnétique. — Les circuits conducteurs, ouverts ou fermés placés dans un diélectrique indéfini, ou dans l'atmosphère au voisinage de la terre, *produisent* dans l'espace qui les environnent, *un champ électromagnétique et rayonnent de l'énergie* quand ils sont parcourus par du courant alternatif.

La quantité d'énergie ainsi dissipée en moyenne par unité de temps a pour expression

$$N\, I^2_{eff}$$

I_{eff} étant l'intensité efficace du courant qui traverse le conducteur.

Dans le cas d'antennes de hauteur efficace l, placées dans l'atmosphère, et reliées à la terre par leur base :

$$N = 160\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2}. \qquad \text{(Unités pratiques)}$$

Dans le cas d'un circuit fermé comprenant K tours de surface Σ placés verticalement dans l'atmosphère, au voisinage de la terre, et dont les dimensions sont très petites par rapport à la longueur d'onde :

$$N = 640\pi^4 \frac{K^2\Sigma^2}{\lambda^4}. \qquad \text{(Unités pratiques)}$$

On voit que, dans les deux cas, *l'énergie rayonnée diminue rapidement quand la longueur d'onde augmente*, ou quand la fréquence diminue, mais beaucoup plus rapidement pour les cadres fermés que pour les antennes ouvertes.

Elle est proportionnelle au carré de la hauteur pour les antennes ouvertes, à la quatrième puissance des dimensions linéaires pour les cadres fermés.

Nous donnons au coefficient N le nom de *radiance.*

Assimilation des antennes et des cadres fermés à des circuits oscillants. — *Un circuit conducteur, antenne ou cadre fermé, de capacité* C, *de self-induction* L, *de résistance* R *et de radiance* N *se comporte comme un circuit de capacité* C, *de self* L, *et de résistance* R + N.

Il est donc, si la résistance et la radiance sont suffisamment petites

$$\left(\frac{(R + N)^2}{4L^2} < \frac{1}{CL}\right),$$

parcouru par des oscillations libres si, l'équilibre électrique ayant été au préalable détruit, le système est abandonné à lui-même. Ces oscillations sont amorties, de la forme :

$$A\, e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi).$$

On a, si $\frac{(R + N)^2}{4L^2}$ est négligeable devant $\frac{1}{CL}$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{R + N}{2L} \\ \omega = \dfrac{1}{\sqrt{CL}}. \end{cases}$$

Le problème de l'émission. — On peut, ainsi que nous l'avons vu, exciter dans l'antenne, ou le cadre fermé des *oscillations libres*. On peut aussi provoquer des *oscillations entretenues* en appliquant une force électromotrice alternative. La fréquence des oscillations est alors celle de la source de force électromotrice. Leur intensité est maxima quand il y a *résonance* entre la source et le circuit, c'est-à-dire quand la fréquence de la source est égale à celle des oscillations libres du circuit.

Le rendement du système transmetteur est d'autant plus grand que la quantité d'énergie rayonnée est plus importante par rapport à celle qui est dissipée sous forme de chaleur dans les conducteurs, les diélectriques, et les prises de terre, sous forme de frottement dans les mécanismes, etc.

On a ainsi *deux moyens* d'exciter l'antenne ou le cadre fermé, c'est-à-dire de rayonner l'énergie sous forme électromagnétique :

1° *Par oscillations libres, amorties ;*

2° *Par oscillations forcées entretenues ;*

C'est le *problème de l'émission.*

Le problème de la réception. — 1° Un conducteur (antenne ou cadre fermé) placé dans un champ électromagnétique, absorbe une certaine quantité d'énergie. Une partie de cette énergie est dissipée à nouveau, par rayonnement, en vertu du pouvoir émissif du conducteur, et sous forme de chaleur, à cause de sa résistance. Une autre partie peut être utilisée pour produire des mouvements de mécanismes enregistreurs ou capables d'impressionner les organes des sens : c'est le problème de la réception.

2° Le système récepteur pouvant, ainsi que l'antenne de transmission, être assimilé à un circuit fermé de capacité C, de self L, de résistance R, est capable d'oscillations libres. Le courant qui le traverse quand il est placé dans un champ électromagnétique, et par conséquent l'intensité de réception seront maxima si la fréquence d'oscillations libres est égale à celle du champ incident. Si le champ électromagnétique est produit par les oscillations libres d'un système transmetteur, le transmetteur et le récepteur ont alors même période propre d'oscillation.

On dit, dans ces conditions, qu'il y a *syntonie* entre la transmission et la réception.

3° Le rendement du système récepteur est d'autant plus grand que l'énergie utile, absorbée par les mécanismes enregistreurs ou capables

d'impressionner les organes des sens, est plus grande par rapport à l'énergie dissipée par rayonnement et par résistance dans les conducteurs.

Radiocommunications. Eléments d'une radiocommunication. — Une combinaison comprenant :

1° *Un système transmetteur*, formé d'une antenne, d'un cadre fermé, ou d'une combinaison d'antennes ouvertes et de cadres fermés, et parcouru par des oscillations électriques ;

2° *Un système récepteur*, composé d'une antenne, d'un cadre fermé, ou d'une combinaison d'antennes ouvertes et de cadres fermés, et muni d'appareils de réception ou d'enregistrement, permet donc une communication par ondes électromagnétiques entre deux points donnés, ou une *radiocommunication*.

Rendement d'une radiocommunication. — L'expression du rendement de la radiocommunication varie suivant l'importance respective des résistances et des radiances des systèmes émetteur et récepteur.

Dans le cas, le plus fréquent en pratique, ou les radiances sont petites par rapport aux résistances :

1° Le rendement de la radiocommunication augmente rapidement avec les dimensions du système rayonnant. Il y a donc *intérêt à employer des antennes de grandes hauteurs*, ou des cadres de grandes surfaces ;

2° Le rendement de la radiocommunication diminue rapidement quand la longueur d'onde augmente, beaucoup plus vite d'ailleurs dans le cas des cadres fermés que dans celui des antennes ouvertes. Il sera donc *nécessaire d'employer de grandes fréquences ;*

3° Le rendement est d'autant plus grand que les résistances sont plus petites.

Dans tous les cas, le *rendement est inversement proportionnel au carré de la distance* des stations d'émission et de réception.

Il est maximum, toutes choses égales d'ailleurs, quand les stations sont en *syntonie*.

Il est, pour des dimensions et des longueurs d'onde comparables plus grand pour les antennes ouvertes que pour les cadres fermés.

Syntonie. — Nous avons vu plus haut que les deux systèmes émetteur et récepteur sont en syntonie quand la fréquence des oscillations libres du récepteur et celle du champ incident sont les mêmes.

La syntonie correspond évidemment à la réception optima, puisqu'alors :

1° L'intensité est plus grande que sur tous les autres réglages du système récepteur ;

2° L'intensité des signaux provenant du système transmetteur est plus grande que celles qui viennent de transmetteurs parcourus par des oscillations de fréquences différentes toutes choses égales d'ailleurs. Le réglage à la syntonie est donc celui qui offre la meilleure garantie contre les signaux perturbateurs.

La syntonie est d'autant plus nette que les amortissements des ondes émises et des oscillations libres de l'antenne réceptrice sont plus petits.

Remarque. — L'augmentation des radiances, qui produit un accroissement des rendements, augmente également des amortissements, et par conséquent diminue l'acuité de la syntonie. A ce point de vue, une syntonie aiguë ne peut donc s'obtenir qu'aux dépens du rendement; et réciproquement. Il y aura, dans chaque cas, à établir, suivant les conditions particulières, un compromis entre le rendement et la syntonie.

Systèmes dirigés et systèmes non dirigés. — La quantité d'énergie émise dans une direction quelconque par une antenne symétrique par rapport à un axe vertical est indépendante de l'angle que fait avec un plan de référence passant par l'axe le plan contenant l'axe et parallèle à la direction donnée. Au contraire dans le cas de cadres verticaux employés comme transmetteurs, le rayonnement est maximum dans le plan du cadre, nul dans le plan perpendiculaire ; l'intensité du champ électromagnétique en un point P est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au cosinus de l'angle θ que fait avec le plan du cadre le plan qui passe par la station d'émission et le point considéré. Un phénomène analogue se produit quand un cadre vertical est utilisé comme récepteur ; l'intensité des signaux reçus en provenance d'une station d'émission donnée est proportionnelle au cosinus de l'angle θ que fait le plan du cadre avec le plan vertical passant par les deux stations d'émission et de réception. Le système est donc dirigé. On conçoit d'ailleurs facilement qu'on puisse, par des combinaisons de cadres et d'antennes modifier à volonté la loi de variation de la quantité d'énergie émise ou reçue, en fonction de la direction. C'est le principe des radiocommunications dirigées.

II. — Objections à la théorie précédente et limites d'application des résultats obtenus

La théorie que nous avons exposée suppose que la terre est plane et parfaitement conductrice, et que l'atmosphère est un diélectrique parfait. Cette théorie, née des travaux de Maxwell et de Hertz, puis développée par un grand nombre de savants éminents, parmi lesquels il faut citer O. Heaviside, A. Blondel, Max Abraham, Brillouin, Henri Poincaré, semblait, dans les premières années de l'histoire de la télégraphie sans fil, quand les ondes employées étaient courtes et les distances franchies relativement faibles, rendre compte de tous les faits connus. Les ondes électromagnétiques étant assimilées aux ondes lumineuses, les cas observés de communications entre stations séparées par des obstacles pouvaient être attribués à la diffraction.

Mais le développement de la télégraphie sans fil fit constater que les ondes ne sont pas arrêtées par la courbure de la terre, qui constitue un obstacle gigantesque, de plusieurs centaines de kilomètres de hauteur quand il s'agit de correspondre pardessus l'Atlantique. Comment expliquer ce phénomène ? Et d'abord l'ancienne théorie de la diffraction pouvait-elle en rendre compte, en supposant, comme l'avaient fait les savants qui avaient abordé le problème auparavant, la terre parfaitement conductrice et l'atmosphère qui l'entoure parfaitement diélectrique et indéfinie ? La question fut reprise par plusieurs auteurs. Nous étudierons plus tard leurs travaux. Après quelque hésitation due à l'extrême complexité du problème, M. Henri Poincaré arriva à cette conclusion que le rapport des actions à distance, suivant qu'on suppose l'existence ou l'absence de l'obstacle formé par la courbure de la terre, décroît très rapidement quand la distance des stations augmente ; ce résultat fut confirmé par le prof. J.-W. Nicholson.

La question semble donc définitivement résolue : la théorie de la diffraction, en supposant la terre parfaitement conductrice, et l'atmosphère parfaitement diélectrique et indéfiniment étendue, n'explique pas la propagation des ondes à grande distance, malgré la courbure de la terre.

Elle ne rend pas compte non plus du pouvoir dirigeant de l'antenne coudée de Marconi, formée d'une partie verticale et d'une partie horizontale beaucoup plus longue ; cette propriété s'explique bien, à petite distance, par l'action de la partie horizontale de l'antenne ; mais cette action devient nulle à grande distance, d'après la théorie, comme

l'ont montré J. Zenneck et Henri Poincaré, dont nous exposerons plus loin les travaux.

Elle ne rend pas compte des cas constatés de réception à grande distance, au moyen d'antennes horizontales fixées à des piquets plantés dans le sol, ou même allongées dans des tranchées.

Enfin les hypothèses faites ne suffisent pas pour rendre compte de toute une série de phénomènes qui semblent tenir aux conditions atmosphériques, des perturbations qui se produisent dans la réception au lever et au coucher du soleil, de la grande différence des portées de jour et de nuit. Pourquoi, si une station émet à la fois deux ondes, l'une d'elles est-elle mieux reçue que l'autre ; sans que rien fasse prévoir cette différence, d'ailleurs variable, l'onde favorisée étant à certains moments remplacée par l'autre, sans cause apparente ? Pourquoi, dans le cas des faibles longueurs d'onde, les obstacles naturels ont-ils plus d'importance le jour que la nuit ? Pourquoi les signaux de grande longueur d'onde sont-ils moins affectés que les autres par toutes ces irrégularités ?

Comment expliquer tous ces phénomènes ? Leur raison ne peut évidemment être trouvée que si l'on abandonne les hypothèses simplificatrices admises jusqu'ici. Dès 1900, Heaviside suggérait que les recherches pourraient s'orienter dans deux directions. Ou bien on supposerait que, pour les fréquences employées, la terre ne peut pas être considérée comme parfaitement conductrice, et l'on devrait alors admettre, que l'onde se propage, partie dans l'air, partie dans les régions superficielles du sol. Ou bien on supposerait que l'air n'est pas parfaitement diélectrique, et que sa conductibilité varie avec l'altitude.

En d'autres termes, la nature du sol et les propriétés de l'atmosphère jouent un rôle dans la propagation des ondes électromagnétiques.

Esquisse d'un traité des radiocommunications

Le phénomène essentiel utilisé dans toute radiocommunication étant la PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES à la surface de la terre, la première étude à faire est celle des conditions de cette propagation, de la façon dont elles sont modifiées par le milieu qui sépare les deux stations d'émission et de réception : ce sera l'objet de la première partie de l'exposé qui suivra.

Nous continuerons en examinant les procédés et les organes com-

muns aux différentes sortes de radiocommunications et d'abord ceux qui sont les mêmes pour l'émission et pour la réception.

Nous avons vu d'abord que la préoccupation d'augmenter le rendement, des radiocommunications, ainsi que l'impossibilité d'établir des antennes dont les dimensions soient hors de proportion avec l'importance des services qu'on en attend, entraînent l'obligation de produire et d'utiliser l'énergie électromagnétique sous forme de haute fréquence. Les installations radiotélégraphiques, radiotéléphoniques, comportent donc des circuits parcourus par des courants de haute fréquence, dont les lois ne sont pas exactement les mêmes que celles de l'électrotechnique de la basse fréquence, qui s'appliquent dans la plupart des problèmes usuels. Les matériaux électrotechniques présentent eux aussi, pour les fréquences élevées, des propriétés spéciales. Les méthodes de mesure, enfin, sont particulières. Il existe donc tout une TECHNIQUE DE LA HAUTE FRÉQUENCE, que nous étudierons dans notre deuxième partie.

Toute station, qu'elle soit émettrice ou réceptrice, comporte une ANTENNE, organe essentiel et caractéristique des radiocommunications, destiné soit à rayonner, soit à capter l'énergie sous forme d'onde électromagnétiques. Nous en examinerons la théorie, le fonctionnement, et la construction. L'étude du problème de la DIRECTION DES ONDES, dans le cas de l'émission, et de la LOCALISATION DE LA DIRECTION DU POSTE DE TRANSMISSION dans le cas de la réception, se rattache à celle de l'antenne, et sera faite dans le même volume.

Nous pourrons ensuite, dans une quatrième partie, aborder l'étude des MÉTHODES DE TRANSMISSION. Il s'agira :

1° De produire l'énergie électrique de haute fréquence ;

2° De faire passer cette énergie dans l'antenne, soit directement, en y insérant l'organe générateur de haute fréquence ; soit indirectement, par exemple par l'intermédiaire de transformateurs ;

3° De contrôler l'énergie rayonnée au moyen d'un organe de commande qui sera d'ailleurs distinct suivant les différentes sortes de radiocommunications : manipulateur, microphone, etc.

Le PROBLÈME DE LA RÉCEPTION, qui sera examiné après celui des méthodes d'émission se divise lui aussi en plusieurs parties :

Captation de l'énergie du champ électromagnétique.

Transformation de l'énergie de haute fréquence en énergie mécanique capable d'impressionner les organes des sens ou de faire fonctionner des dispositifs enregistreurs.

Dispositifs d'observation et d'enregistrement.

Moyens d'amplifier les courants de haute et de basse fréquence.

L'étude des conditions à remplir et des organes communs à tous les modes de radiocommunications étant ainsi terminée, nous aborderons celle des cas particuliers.

Radiotélégraphie.
Radiotéléphonie.
Transmission des images et vision a distance.
Radiomécanique.
Applications diverses.

Nous terminerons par un Formulaire du Radiotélégraphiste, volume de tables, de graphiques, de références et de bibliographies, dans lequel nous coordonnerons les résultats obtenus, nous en indiquerons l'utilisation pour l'établissement des *projets* de radiocommunications ; enfin nous rassemblerons les *données* diverses qu'il est nécessaire d'avoir à sa disposition dans la pratique de l'art complexe du radiotélégraphiste.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES RADIOCOMMUNICATIONS

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie BUSSIÈRE.

